MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 24.

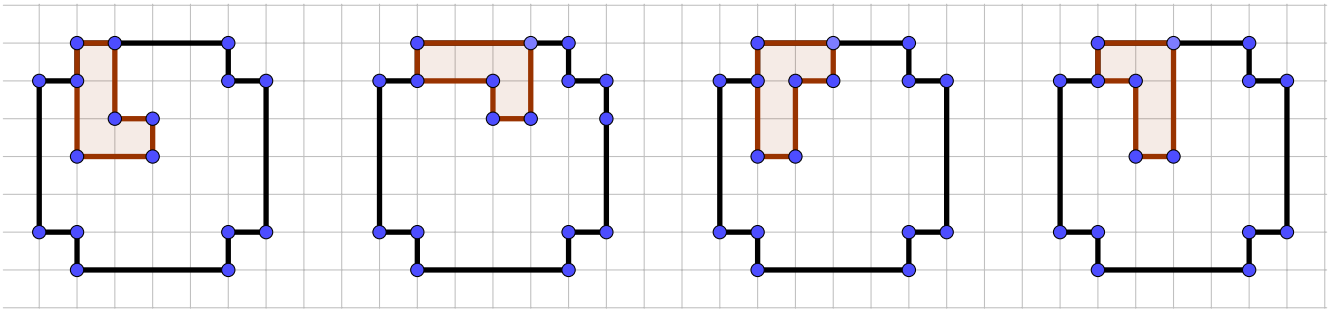
V. osztály

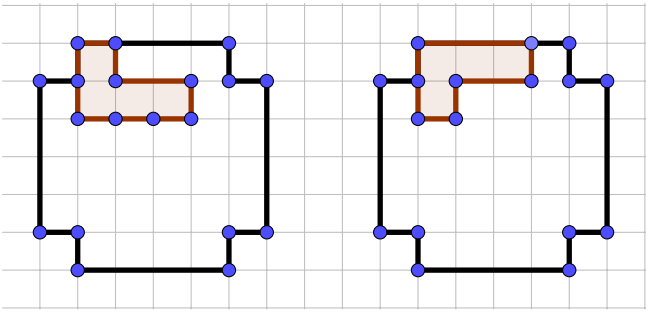
1. feladat (30 pont). A gyűrűk ura a műhelyében varázsgyűrűt készít, amelyeket majd a boltjában elad, darabját 10 petákért. Gyűrűket csak munkanapokon készít, de boltja a hét minden napján nyitva van. Hétfő reggel belépett az üres boltjába, nekifogott és készített néhány gyűrűt. Kedden háromszor annyit készített, mint hétfőn, és eladott a hétfőn készített gyűrűkből 12 darabot. Szerdán feleannyi gyűrűt készített, mint hétfőn és eladta a kedden készített gyűrűk felét, amelyekért 240 petákot kapott. Csütörtökön és pénteken is ugyanannyi gyűrűt készített és adott el, mint kedden. Hány petákot érnek a hétvégére a boltban maradt gyűrűk? *Bíró Gabriella, Nagyvárad*

Megoldás. Hivatalból
Szerdán 240 petákot kapott, tehát $240 : 10 = 24$ gyűrűt adott el. **(3 pont)**
Kedden ennek a kétszeresét, tehát $24 \cdot 2 = 48$ darab gyűrűt készített. **(3 pont)**
Hétfőn ennek a harmadát készítette, tehát $48 : 3 = 16$ gyűrűt készített. **(3 pont)**
Szerdán feleannyit készített, mint hétfőn, tehát $16 : 2 = 8$ gyűrűt készített. **(3 pont)**
Csütörtökön és pénteken 48–48 darab gyűrűt készített és 12–12 darab gyűrűt adott el. **(3 pont)**
Így összesen $16 + 48 + 8 + 48 + 48 = 168$ darab gyűrűt készített. **(3 pont)**
$12 + 24 + 12 + 12 = 60$ darab gyűrűt adott el. **(3 pont)**
$168 - 60 = 108$ darab gyűrű maradt a boltban, ami $108 \cdot 10 = 1080$ peták. **(6 pont)**
■

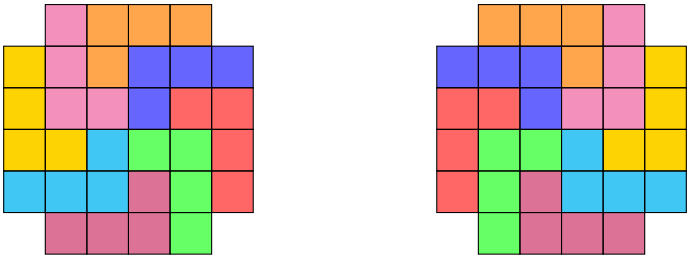
2. feladat (30 pont). Egy 6x6-os tábla négy sarkát kivágtuk. A maradékot L-alakú, négy egységnégyzetből álló darabokkal szeretnénk teljesen lefedni úgy, hogy a darabok egymást ne fedjék. A darabok tetszőlegesen elhelyezhetők a táblán, de minden darabnak pontosan 4 kis négyzetecskét kell fednie. Keresd meg az összes lehetséges lefedést! *András Szilárd, Csíkdelne*

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**
Nézzük a felső bal sarok melletti mezőt. Ezt az alábbi hat módon lehet lefedni (úgy, hogy folytatható legyen a lefedés):

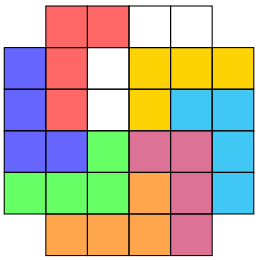




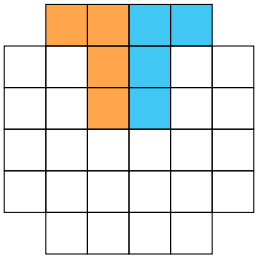
Az első és a második ábrát lépésről lépésre csak a következő ábrának megfelelően lehet folytatni(a két kitöltés egymás tükörképe):



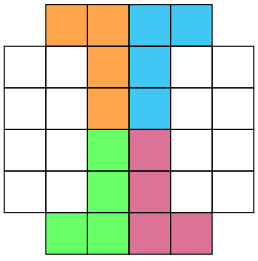
A harmadik kezdési lehetőség esetén a következő 6 darabot el lehet helyezni egyértelműen, de az utolsó darab nem helyezhető el.



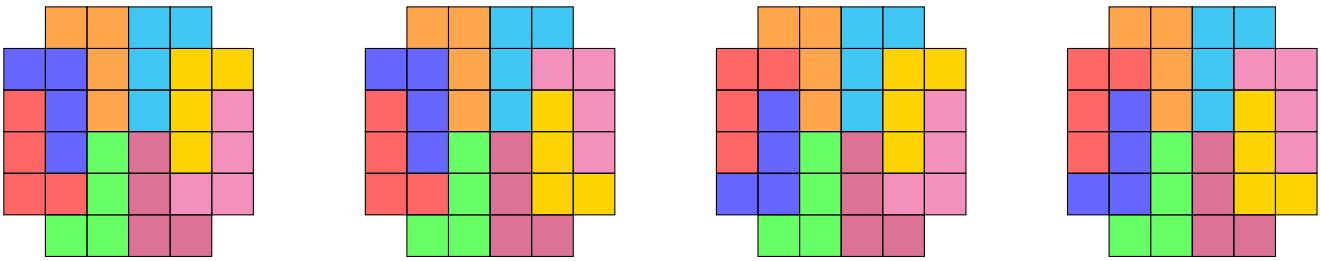
A negyedik kezdési lehetőség esetén ahhoz, hogy elkerüljük az előbbi lehetetlen esetet, a felső sort csak az ábrának megfelelően lehet lefedni.



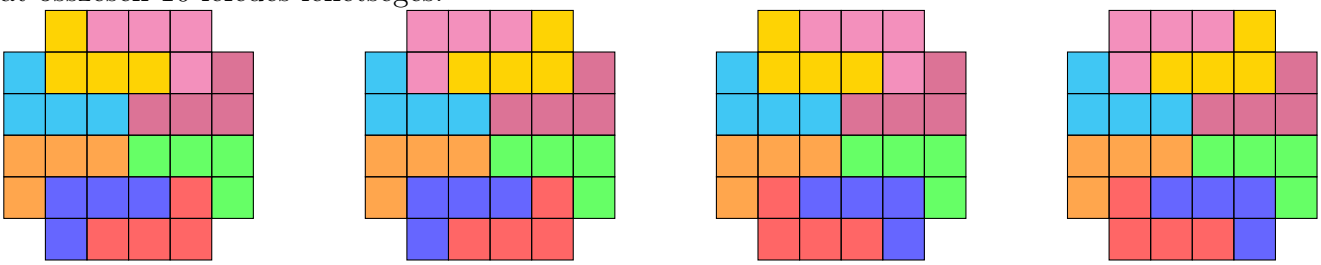
Ezután az alsó sorban is csak az ábrának megfelelő lefedés folytatható (különben valamelyik korábban más vizsgált esettel ellentmondásba keverednénk).



A megmaradt két 2×4-es darab mindegyike kétféle módon fedhető le, ez összesen 4 lefedést eredményez.



Az ötödik és hatodik kezdési lehetőségből az előbbi négy lefedés elforgatott változatait kapjuk meg, tehát összesen 10 lefedés lehetséges.



Pontozás. A három lényegesen különböző (tehát szimmetriával vagy forgatással nem egymásba vihető) lefedés lerajzolása (ez három 6-6 pontos részre bontható aszerint, hogy ezekből hány lefedést adott meg a megoldó). (**18 pont**)
Valamilyen logika szerinti magyarázat. (**3 pont**)
A további lefedések lerajzolása vagy megemlítése. (**6 pont**)

■

3. feladat (20 pont). Adott az $n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2025}$ természetes szám.

a) Igazold, hogy n egy páratlan szám!

b) Határozd meg n utolsó számjegyét!

c) Igazold, hogy n osztható 11-gyel!

Czeglédi Csilla-Ilona, Arad
Kiss Sándor, Nagykároly

Megoldás. Hivatalból (**2 pont**)

a) Az n szám 2025 darab páratlan szám összegéből áll, ezért n páratlan. (**2 pont**)

b) A 3 hatványainak utolsó számjegyei lehetnek:

$$u(3^1) = 3, \quad u(3^2) = 9, \quad u(3^3) = 7, \quad u(3^4) = 1, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

amelyek négyenként ismétlődnek. Az n szám 2025 tagból áll, így felbontható 506 darab 4-es csoportra és egy maradék tagra:

$$n = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8) + \cdots + (3^{2021} + 3^{2022} + 3^{2023} + 3^{2024}) + 3^{2025}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Kiemelve a közös tényezőt:

$$n = 3(1+3+3^2+3^3) + 3^5(1+3+3^2+3^3) + \cdots + 3^{2021}(1+3+3^2+3^3) + 3^{2025}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

$$n = (1+3+3^2+3^3)(3+3^5+3^9+\cdots+3^{2021}) + 3^{2025}.$$

Mivel $1+3+9+27 = 40$, ezért $n = 40(3+3^5+3^9+\cdots+3^{2021}) + 3^{2025}$. **(2 pont)**
Így az utolsó számjegy:

$$u(n) = u(40(3+3^5+3^9+\cdots+3^{2021})) + u(3^{2025}) = 0+3 = 3. \quad \textbf{(2 pont)}$$

c) Észrevesszük, hogy ha összeadjuk az első 5 tagot, $3+9+27+81+243 = 363$, ami 11-nek többszöröse. **(2 pont)**
Ezért az összeget ötösével csoportosítjuk:

$$n = (3+3^2+3^3+3^4+3^5)+(3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10})+\cdots+(3^{2021}+3^{2022}+3^{2023}+3^{2024}+3^{2025}). \quad \textbf{(2 pont)}$$

Minden egyes csoportból kiemeljük a közös tényezőt:

$$n = 3(1+3+3^2+3^3+3^4) + 3^6(1+3+3^2+3^3+3^4) + \cdots + 3^{2021}(1+3+3^2+3^3+3^4).$$

Mivel $1+3+3^2+3^3+3^4 = 1+3+9+27+81 = 121$, ezért $n = 121(3+3^6+\cdots+3^{2021})$.
Mivel $121 = 11^2$, ezért n osztható 11-gyel. **(2 pont)**

■

4. feladat (20 pont). Az a természetes számot „mágikus” számnak nevezzük, ha felírható két, egymástól és nullától is különböző négyzetszám összegeként.

a) Határozd meg a kétjegyű „mágikus” számok számát!

b) Mennyi lehet egy kétjegyű „mágikus” prímszám 4-gyel való osztási maradéka?

c) Igazold, hogy 26^n „mágikus” szám, bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén!

Faluvégi Melánia, Zilah

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a) A nullától különböző 100-nál kisebb négyzetszámok: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. **(2 pont)**
Észrevesszük, hogy $1+4 = 5$ az „mágikus” szám, de nem kétjegyű, ezért nem vesszük figyelembe. **(2 pont)**

$1+9 = 10$	$4+9 = 13$	$9+16 = 25$
$1+16 = 17$	$4+16 = 20$	$9+25 = 34$
$1+25 = 26$	$4+25 = 29$	$9+36 = 45$
$1+36 = 37$	$4+36 = 40$	$9+49 = 58$
$1+49 = 50$	$4+49 = 53$	$9+64 = 73$
$1+64 = 65$	$4+64 = 68$	$9+81 = 90$
$1+81 = 82$	$4+81 = 85$	

$16+25=41$ $25+36=61$ $36+49=85$
$16+36=52$ $25+49=74$
$16+49=65$ $25+64=89$
$16+64=80$
$16+81=97$

A fenti felsorolásból 29 megoldást kaptunk, de észrevettük, hogy a 65 és 85 kétszer szerepel, ezért csak 27 „mágikus” szám marad. **(6 pont)**

b) Az előbb felsorolt számok közt a „mágikus” prímszámok a $13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97$. Ezeknek a 4-gyel való osztási maradéka 1. **(2 pont)**

c)

$$26^1 = 26 = 1 + 25 = 1^2 + 5^2$$

$$26^2 = 676 = 576 + 100 = 24^2 + 10^2$$ **(2 pont)**

$$26^3 = 26 \cdot 26^2 = 25 \cdot 26^2 + 1 \cdot 26^2 = 5^2 \cdot 26^2 + 1^2 \cdot 26^2 = (5 \cdot 26)^2 + (1 \cdot 26)^2$$

$$26^4 = 676 \cdot 26^2 = 24^2 \cdot 26^2 + 10^2 \cdot 26^2 = (24 \cdot 26)^2 + (10 \cdot 26)^2$$ **(2 pont)**

Hasonlóan járunk el minden páratlan, illetve páros hatványkitevő esetén. Ha n páros és legalább 4, akkor létezik k természetes szám, amelyre $n = 2k + 2$.

$$26^{2k+2} = 676 \cdot 26^{2k} = 24^2 \cdot 26^{2k} + 10^2 \cdot 26^{2k} = (24 \cdot 26^k)^2 + (10 \cdot 26^k)^2$$

Ha n páratlan és legalább 3, akkor létezik k természetes szám, amelyre $n = 2k + 1$.

$$26^{2k+1} = 26 \cdot 26^{2k} = 25 \cdot 26^{2k} + 1 \cdot 26^{2k} = 5^2 \cdot 26^{2k} + 1^2 \cdot 26^{2k} = (5 \cdot 26^k)^2 + (1 \cdot 26^k)^2$$

Mivel mindkét esetben a 26^n szám felírható két négyzetszám összegeként következik, hogy 26^n „mágikus” szám. **(2 pont)**

■

Hivatalból összesen: 10 pont.

További pontszám összesen: 90 pont.

FONTOS TUDNIVALÓ!
Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.