MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 24.

VI. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg azokat az $\overline{abac}$ alakú természetes számokat, amelyeket 77-tel osztva a hányados $\overline{ac}$, a maradék pedig a c számjegy négyszerese!

Papp Ilonka, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**
Az adatok alapján felírható, hogy $\overline{abac} : 77 = \overline{ac}$, $m = 4c$, ahol a, b, c számjegyek, $a \neq 0$ és $4c < 77$.
A maradékos osztás tétele alapján:

$$\overline{abac} = 77 \cdot \overline{ac} + 4c\,, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

ahonnan:

$$1000a + 100b + 10a + c = 77 \cdot (10a + c) + 4c \qquad \textbf{(3 pont)}$$
$$1010a + 100b + c = 770a + 77c + 4c$$
$$240a + 100b = 80c\,.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát elosztva 20-szal kapjuk, hogy

$$12a + 5b = 4c\,. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Mivel $4 \mid (12a)$ és $4 \mid (4c)$, ezért $4 \mid (5b)$, de $(4; 5) = 1$, így $4 \mid b$. Ezért a b számjegyre igaz, hogy $b \in \{0; 4; 8\}$. **(3 pont)**

I. eset: Ha $b = 0$, akkor $12a = 4c$, azaz $c = 3a$. **(3 pont)**

$$a = 1 \Longrightarrow c = 3 \Longrightarrow \overline{abac} = 1013,$$
$$a = 2 \Longrightarrow c = 6 \Longrightarrow \overline{abac} = 2026,$$
$$a = 3 \Longrightarrow c = 9 \Longrightarrow \overline{abac} = 3039,$$
$$a = 4 \Longrightarrow c = 12 > 9\,. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

II. eset: Ha $b = 4$, akkor $12a + 20 = 4c$, azaz $c = 3a + 5$.

$$a = 1 \Longrightarrow c = 8 \Longrightarrow \overline{abac} = 1418,$$
$$a = 2 \Longrightarrow c = 11 > 9\,. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

III. eset: Ha $b = 8$, akkor $12a + 40 = 4c$, azaz $c = 3a + 10 > 9$. De $c \leq 9$, vagyis ebben az esetben nincs a feltételnek megfelelő szám. **(3 pont)**

Az előbbi négy szám mindegyike telesíti a feltételeket (mert az átalakítások visszafele is elvégezhetők), ezért a keresett négyjegyű természetes számok: 1013, 1418, 2026, 3039. **(3 pont)**
■

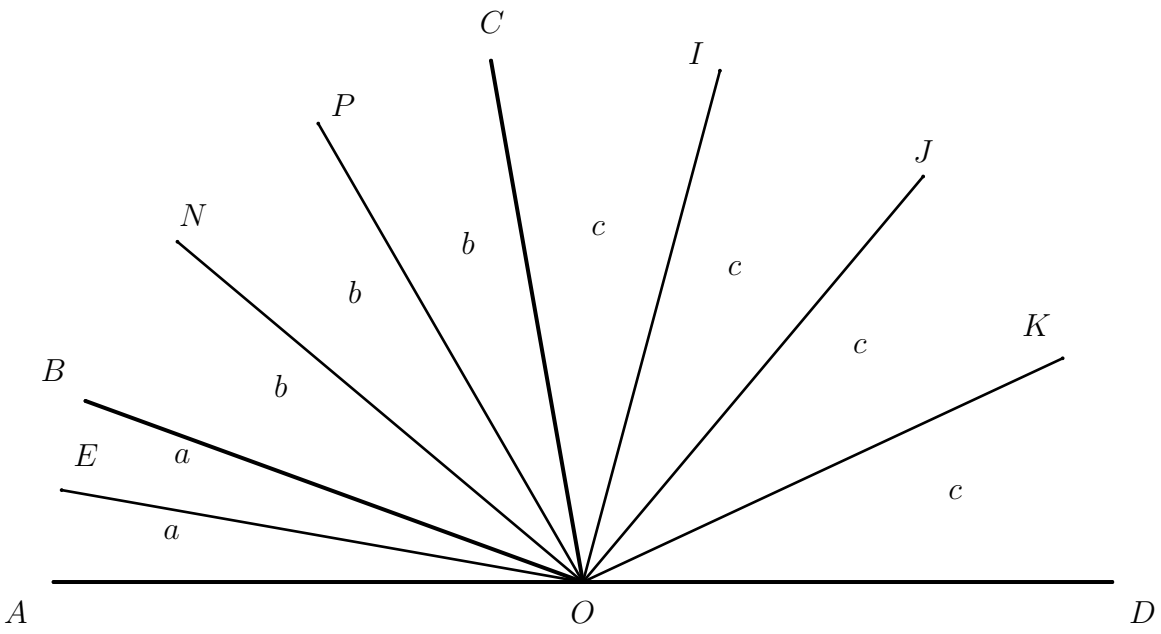
2. feladat (30 pont). Az AOB és BOC egymás melletti szögek, a BOC és COD is egymás melletti szögek és a három szög mértékének összege 180°. Vegyük fel az O pontból kiinduló OE, ON, OP, OI, OJ és OK félegyeneseket az adott szögek belső tartományaiban úgy, hogy $\widehat{AOE} = \widehat{EOB}$, $\widehat{BON} = \widehat{NOP} = \widehat{POC}$ és $\widehat{COI} = \widehat{IOJ} = \widehat{JOK} = \widehat{KOD}$. Tudjuk, hogy $\widehat{AOP} = 60°$ és $\widehat{BOK} = 135°$.

a) Határozd meg az AOB, BOC és COD szögek mértékét!

b) Igazold, hogy a BOP és IOK szögek szögfelezői merőlegesek egymásra!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**



(3 pont)

a) Legyen $\widehat{AOE} = \widehat{EOB} = a$, $\widehat{BON} = \widehat{NOP} = \widehat{POC} = b$ és $\widehat{COI} = \widehat{IOJ} = \widehat{JOK} = \widehat{KOD} = c$. Ekkor felírhatjuk, hogy

$$2a + 3b + 4c = 180° \,. \tag{1}$$

(3 pont)

Viszont

$$\widehat{AOP} = 2a + 2b = 60°,$$

$$\widehat{BOK} = 3b + 3c = 135°.$$

(3 pont)

Így $2a + 2b = 60°$ és $b + c = 45°$, ahonnan

$$2a + 3b + c = 105°. \tag{2}$$

(3 pont)

Az (1) és (2) alapján $3c = 180° - 105° = 75°$, azaz $c = 25°$. **(3 pont)**

Mivel $b + c = 45°$, következik, hogy $b = 20°$.
Ugyanakkor $2a + 2b = 60°$, azaz $a + b = 30°$, tehát $a = 10°$. **(3 pont)**

Tehát $\widehat{AOB} = 2a = 20°$, $\widehat{BOC} = 3b = 60°$ és $\widehat{COD} = 4c = 100°$. **(3 pont)**

b) A $\widehat{BOP}$ szögfelezője az ON félegyenes, az $\widehat{IOK}$ szögfelezője pedig az OJ félegyenes, tehát meg kell határozni az $\widehat{NOJ}$ szög mértékét. **(3 pont)**

Ekkor $\widehat{NOJ} = \widehat{NOC} + \widehat{COJ} = 2b + 2c = 2 \cdot 20° + 2 \cdot 25° = 90°$, azaz $ON \perp OJ$. **(3 pont)**

■

3. feladat (20 pont). A Salamon Ernő Gimnáziumban az idei tanévben 540 diák tanul. Az iskolában három szakkör működik: a nemezelés, a fafaragás és a jégkorong. Minden diák jár legalább egy szakkörre. A tanulók 45%-a jégkorongozni jár, egyharmada nemezeléssel foglalkozik. A tanulók egytizede jégkorongozás és nemezelés szakkörre is jár, 30%-a jégkorongozik is és fafaragást is tanul, míg 15%-a nemezeléssel is és fafaragással is foglalkozik. Az iskola tanulóinak 5%-a mindhárom szakkörön részt vesz.

a) Hány tanuló vesz részt mind a három szakkörön?

b) Az iskola tanulóinak hány százaléka jár legtöbb egy szakkörre?

c) Hány tanuló nem jár sem jégkorongozni sem nemezelni?

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a) A tanulók 5%-a jár midhárom szakkörre, ezért $\dfrac{540 \cdot 5}{100} = 27$ tanuló jégkorongozik, nemezel és fát is farag. **(2 pont)**

b) A tanulók egytizede jégkorongozni és nemezelni is jár, ez 54 gyereket jelent. Mivel 27 tanuló mindhárom szakkört látogatja, ezért a csak jégkorongozók és nemezelők száma $54 - 27 = 27$ tanuló. **(2 pont)**

Ugyanígy számoljuk ki a csak jégkorongozni és fafaragásra járó tanulók számát: a tanulók 30%-a jégkorongozást és a fafaragást tanul, ami $\frac{540 \cdot 30}{100} = 162$ tanulót jelent. Csak erre a két szakkörre $162 - 27 = 135$ tanuló jár. (**2 pont**)

A tanulók 15%-a jár nemezelni és fát faragni, ami $\frac{540 \cdot 15}{100} = 81$ tanulót jelent. Mivel 27 tanuló mind a három szakkört látogatja, ezért csak a nemezelés és a fafaragás szakkörre $81 - 27 = 54$ tanuló jár. A tanulók közül pontosan két szakkört $27 + 135 + 54 = 216$ tanuló látogat. (**2 pont**)

Tehát a tanulók közül legtöbb egy szakkörre $540 - 27 - 216 = 297$ tanuló jár. (**2 pont**)

$$540 \ldots\ldots 100\%$$
$$297 \ldots\ldots x\%$$

Tehát $x = \frac{297 \cdot 100}{540} = 55$, vagyis a 297 tanuló az iskola tanulóinak 55%-át jelenti. (**2 pont**)

c) Azoknak a tanulóknak a számát keressük, akik nem járnak jégkorongozási vagy nemezelési szakkörre. Ők azok, akik csak a fafaragó szakkört látogatják. (**2 pont**)

A tanulók 45%-a jégkorongozni jár, ez $\frac{540 \cdot 45}{100} = 243$ tanulószámot jelent. Így $243-(135+27+27) = 54$ tanuló csak a jégkorong szakkört látogatja.

A tanulók egyharmada nemezelni jár, $\frac{540 \cdot 1}{3} = 180$ tanuló. Közülük $180 - (27 + 27 + 54) = 72$ csak a nemezelő szakkörre jár. (**2 pont**)

Mivel összesen 297 tanuló látogat egy szakkört és közülük 54 tanuló csak jégkorongozni és 72 tanuló csak nemezelni jár, következik, hogy $297-(54+72) = 171$ tanuló jár csak fafaragó szakkörre. (**2 pont**)

Ellenőrzés: három szakkörre jár 27 tanuló, pontosan két szakkörre jár $27 + 135 + 54 = 216$ tanuló, csak egy szakkörre jár $54 + 72 + 171 = 297$ tanuló. Így $27 + 216 + 297 = 540$ tanuló jár a Salamon Ernő Gimnáziumba az idei tanévben.

■

4. feladat (20 pont). Az a és b természetes számok legkisebb közös többszörösének és a számok kétszeresének az összege egyenlő a számok legnagyobb közös osztójának az 50-szeresével. Határozd meg ezeket az a és b számokat, ha összegük legfennebb 50.

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból (**2 pont**)
A feladat feltételeiből kapjuk, hogy $[a; b] + 2a + 2b = 50 \cdot (a; b)$. (**2 pont**)

Legyen $d = (a; b)$, ekkor felírhatjuk, hogy $a = d \cdot x$ és $b = d \cdot y$, ahol x, y relatív prímek. A legkisebb közös többszörös értelmezéséből és tulajdonságaiból következik, hogy $[a; b] = d \cdot x \cdot y$. Így az egyenlet átírható

$$d \cdot x \cdot y + 2 \cdot d \cdot x + 2 \cdot d \cdot y = 50 \cdot d. \quad (\textbf{4 pont})$$

Mivel $d \neq 0$, egyszerűsíthetünk vele és kapjuk, hogy $xy + 2x + 2y = 50$. Bal oldalra felírhatjuk, hogy $xy + 2x + 2y = (x + 2)(y + 2) - 4$. Tehát $(x + 2)(y + 2) = 54$. **(4 pont)**

Az 54-et felírva két osztójának szorzataként $54 = 1 \cdot 54 = 2 \cdot 27 = 3 \cdot 18 = 6 \cdot 9$.
Tudjuk, hogy $x, y \geq 1$, így $x + 2 \geq 3$ és $y + 2 \geq 3$, ahonnan az $(x + 2)$ és $(y + 2)$ lehetséges értékei

$$(x + 2, y + 2) \in \{(3, 18), (18, 3), (6, 9), (9, 6)\},$$

vagyis

$$(x, y) \in \{(1, 16), (16, 1), (4, 7), (7, 4)\}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

A számpárok tagjai relatív prímek, így ezek az (x, y) számpár összes lehetséges értéke.
Most mindegyik számpár esetén meg kell határozzuk a d szám lehetséges értékeit úgy, hogy $d \cdot (x + y) \leq 50$.
Az első két számpár esetén az összeg $x+y = 1+16 = 17$, így a $17d \leq 50$ egyenlőtlenségből $d \in \{1, 2\}$.
Vagyis

$$(a, b) \in \{(1, 16), (16, 1), (2, 32), (32, 2)\}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Az utolsó két számpár esetén az összeg $x + y = 4 + 7 = 11$, így a $11d \leq 50$ egyenlőtlenségből $d \in \{1, 2, 3, 4\}$. Vagyis

$$(a, b) \in \{(4, 7), (7, 4), (8, 14), (14, 8), (12, 21), (21, 12), (16, 28), (28, 16)\}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Tehát az összes lehetséges (a, b) számpár:

$$(1, 16), (16, 1), (2, 32), (32, 2), (4, 7), (7, 4), (8, 14), (14, 8), (12, 21), (21, 12), (16, 28), (28, 16)$$

(2 pont)

■

Hivatalból összesen: 10 pont.

További pontszám összesen: 90 pont.

FONTOS TUDNIVALÓ!
Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.