MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

# VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
# XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
**országos szakasz, 2026. február 24.**

## VII. osztály

**1. feladat (30 pont).** Határozd meg az $A = \left\{ \overline{abc} \;\middle|\; \sqrt{\overline{abc} + \sqrt{c}} \in \mathbb{N} \right\}$ halmazt, elemei felsorolásával! *Faluvégi Melánia, Zilah*

*Megoldás.* Hivatalból **(3 pont)**

$$\sqrt{\overline{abc} + \sqrt{c}} \in \mathbb{N}$$

egyenértékű azzal, hogy

$$\overline{abc} + \sqrt{c} = k^2, \quad \text{ahol } k \in \mathbb{N}. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Mivel $c$ számjegy és $\sqrt{c} \in \mathbb{N}$, következik, hogy $c = m^2$, amiből $c \in \{0, 1, 4, 9\}$. **(3 pont)**
Így $\sqrt{c} \in \{0, 1, 2, 3\}$, viszont $\sqrt{c} \neq 1$ és $\sqrt{c} \neq 3$ mert ezekben az esetekben $k^2$ utolsó számjegye 2 lenne és teljes négyzet utolsó számjegye nem lehet 2. **(3 pont)**
Marad tehát leellenőrizni a $c \in \{0, 4\}$ eseteket.

**1. eset:** $c = 0$

$$\overline{ab0} = k^2,$$

következik, hogy $\overline{ab0}$ osztható 10-zel. De mivel $\overline{ab0}$ négyzetszám, $\overline{ab0}$ osztható 100-zal, **(3 pont)**
tehát $\overline{ab0} \in \{100, 400, 900\}$. **(3 pont)**

**2. eset:** $c = 4$

Innen következik $\sqrt{c} = 2$, ebből pedig $k^2$ utolsó számjegye 6, tehát **(3 pont)**
$\overline{ab6} = k^2$ és $k$ utolsó számjegye 4 vagy 6 lehet. **(3 pont)**
Így $\overline{ab6} \in \{196, 256, 576, 676\}$, és így $\overline{abc} \in \{194, 254, 574, 674\}$. **(3 pont)**
Az 1. és 2. esetekből tehát $A = \{100, 194, 254, 400, 574, 674, 900\}$. **(3 pont)**

■

**2. feladat (30 pont).** Marci leírta a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{30}$ számokat különböző oszlopokba úgy, hogy bármelyik két oszlopot választja ki, legyen az oszlopoknak egy-egy eleme, amit össze tud adni. Marci a $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ számokat pontosan akkor tudja összeadni, ha a gyökök alól ki tud emelni természetes számokat úgy, hogy a gyökök alatt ugyanaz maradjon mindkét számban. Például a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ számokat Marci össze tudja adni, de a $\sqrt{2}$ és $\sqrt{6}$ számokat nem tudja összeadni.

a) Határozd meg hány összeadható számokból álló számpár képezhető, amelyben a tagok különbözőek?

b) Legfeljebb hány oszlopot tud Marci képezni a megengedett szabályok szerint? Válaszodat indokold!

*Köncse Balázs, Csíkszereda*

*Megoldás.* Hivatalból **(3 pont)**

a) Megnézzük, legfeljebb hány számpár van, amely összeadható számokból áll a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{30}$ számok között.

Összeadhatóak a $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}$ számok (teljes négyzetek), ezekből összesen 10 számpár képezhető. **(3 pont)**

Összeadhatóak a $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}$ számok, ezekből összesen 3 számpár képezhető.

Összeadhatóak a $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}$ számok, ezekből összesen 3 számpár képezhető. **(3 pont)**

Összeadhatóak a $(\sqrt{5}, \sqrt{20}), (\sqrt{6}, \sqrt{24}), (\sqrt{7}, \sqrt{28})$ számpárok tagjai, ami további $1+1+1=3$ számpár. Ez összesen:$10+3+3+3=19$ számpár. **(3 pont)**

b) Egy lehetséges táblázat:

| 1. oszlop | 2. oszlop | 3. oszlop | 4. oszlop | 5. oszlop | 6. oszlop |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{1}$ | $\sqrt{4}$ | $\sqrt{9}$ | $\sqrt{16}$ | $\sqrt{25}$ | $\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{8}$ | $\sqrt{18}$ | $\sqrt{12}$ | $\sqrt{27}$ | $\sqrt{28}$ | $\sqrt{3}$ |
| | | | | | $\sqrt{5}$ |
| | | | | | $\sqrt{6}$ |
| | | | | | $\sqrt{7}$ |

A fennmaradó számokat bárhova beírhatjuk. Így egy helyes kitöltést kapunk 6 oszlop esetén. **(12 pont)**

**Megjegyzés.** Ha 5 oszlop teljesíti a feltételt, akkor 3 pont jár, ha pedig 5 oszlop teljesíti és a 6. oszlop részlegesen, akkor 6 pont jár.

Ha létezne egy 7 oszlopos kitölthető táblázat, akkor bármely két oszlophoz tartozna legalább egy olyan számpár, amelyet összeadható számok alkotnak. Az oszlopokat számozzuk meg balról jobbra 1-től 7-ig. Az első oszlophoz 6 másik oszlopot párosíthatunk, a másodikhoz további 5-öt, a harmadikhoz további 4-et és így tovább. **(3 pont)**
Összesen tehát

$$6+5+4+3+2+1=21$$

különböző összegre lenne szükség. Mivel azonban az adott számokból csak 19 különböző összeadható tagú számpár hozható létre, így egy 7 oszlopos táblázat nem tölthető ki az adott feltétel betartásával. Tehát legfeljebb 6 oszlopos táblázat alakítható ki. **(3 pont)**

■

**3. feladat (20 pont).** Adottak az $x$ és $y$ nullától különböző természetes számok, amelyek teljesítik a következő összefüggést:

$$\frac{2026}{2027} < \frac{x}{y} < \frac{2027}{2028}.$$

a) Igazold, hogy az $x$ és $y$ nem egymás utáni számok!

b) Mennyi az $x + y$ legkisebb értéke, ha $y = x + a$ és $a \in \mathbb{N}^*$?

*Gáspár Edit, Zilah*
*Hasas Tünde, Nagyvárad*

*Megoldás.* Hivatalból **(2 pont)**

a) Tegyük fel, hogy $x$ és $y$ egymást követő természetes számok, ekkor $y = x + 1$. **(2 pont)**
Az egyenlőtlenség így írható:

$$\frac{2026}{2027} < \frac{x}{x+1} < \frac{2027}{2028}.$$

Külön vizsgálva a két egyenlőtlenséget:

$$\frac{2026}{2027} < \frac{x}{x+1} \quad \text{és} \quad \frac{x}{x+1} < \frac{2027}{2028}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Átalakítva:

$$x > 2026 \quad \text{és} \quad x < 2027.$$

Ez lehetetlen, mivel $x$ természetes szám. **(4 pont)**
Tehát a feltevés hamis, vagyis $x$ és $y$ nem egymás utáni természetes számok. **(2 pont)**

b) Legyen $y = x + a$, ahol $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ (mivel az $a = 1$ esetet tárgyaltuk az a) alpontban). Ekkor az egyenlőtlenség így alakul:

$$\frac{2026}{2027} < \frac{x}{x+a} < \frac{2027}{2028}.$$

Az előző módszerrel eljárva kapjuk:

$$2026a < x < 2027a. \qquad \textbf{(4 pont)}$$

Ha $a = 2$, akkor

$$4052 < x < 4054,$$

amiből $x = 4053$. Ekkor $y = 4055$. **(2 pont)**
Így $x + y = 4053 + 4055 = 8108$. Ha $a$ értékét növeljük, akkor $x + y$ csak nagyobb lesz, tehát a legkisebb összeg: 8108. **(2 pont)**

■

*A b) alpont második megoldása.* Mivel $\frac{x}{y}$ valódi tört, ezért $x < y$. Az adott egyenlőtlenség felírható a következő alakban:

$$1 - \frac{1}{2027} < \frac{x}{y} < 1 - \frac{1}{2028}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A megfelelő átalakításokat elvégezve kapjuk, hogy

$$2027 < \frac{y}{y-x} < 2028. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Vizsgáljuk a $y - x$ lehetséges értékeit. Ha $y - x = 1$, akkor $2027 < y < 2028$, ami lehetetlen. Ha $y - x = 2$, akkor $4054 < y < 4056$, amiből $y = 4055$, így $x = 4053$. Ekkor $x + y = 4053 + 4055 = 8108$. **(2 pont)**

Ha $y - x \geq 3$, akkor $y$ és $x$ értéke is tovább növekszik, ezért az $x + y$ összeg is nagyobb lesz. Tehát az $x + y$ legkisebb értéke: 8108. **(2 pont)**

■

**4. feladat (20 pont).** Az $A$, $B$ és $C$ középpontú körök páronként kívülről érintik egymást az $M$, $N$ és $P$ pontokban úgy, hogy $M \in AB$, $N \in BC$ és $P \in AC$. Legyen $K$ az $NM$ egyenesnek az $A$ középpontú körrel való második metszéspontja. Az $A$ és $C$ középpontú körökben vedd fel rendre a $PF$ és $NE$ átmérőket!

a) Bizonyítsd be, hogy $KA \parallel BC$!

b) Igazold, hogy a $K, P$ és $E$ pontok kollineárisak!

c) Mutasd ki, hogy a $KE$ és $FM$ egyenesek által alkotott szög kongruens az $MPN$ szöggel!

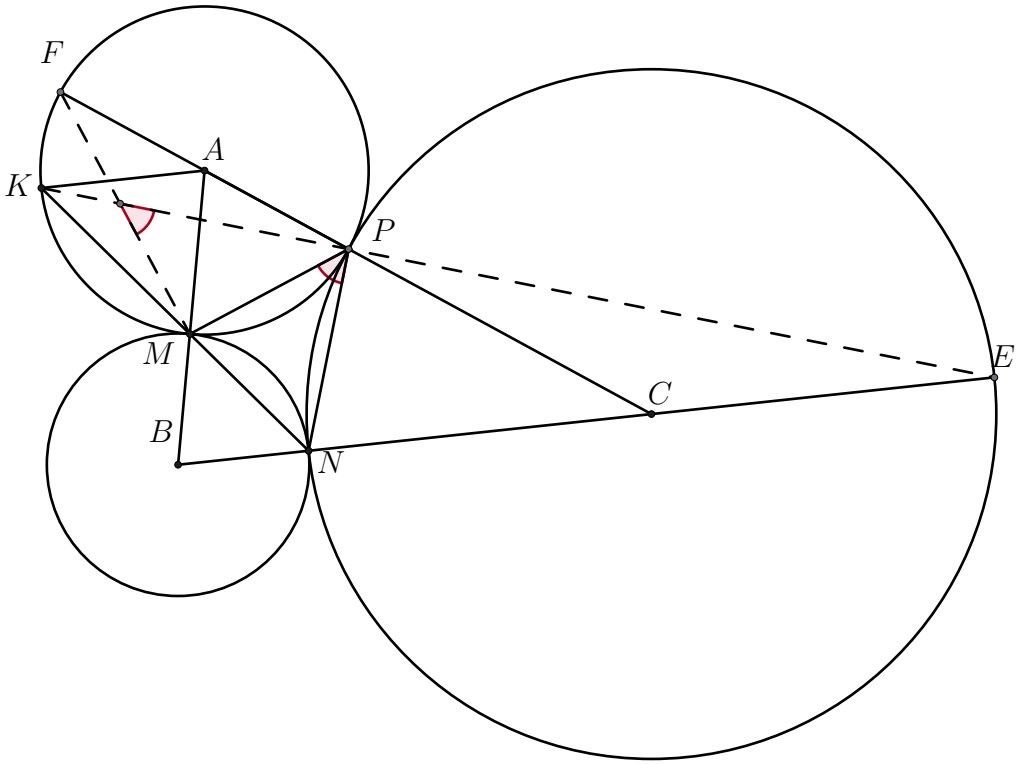
*Simon József, Csíkszereda*

*Megoldás.* Hivatalból **(2 pont)**

a) A $BMN$ és $AMK$ egyenlő szárú háromszögek, mert $BM = BN$ és $AM = AK$ sugarak. **(2 pont)**
Mivel $\widehat{BMN} = \widehat{AMK} \Rightarrow \widehat{BNK} = \widehat{AKN}$, amelyek belső váltószögek, **(2 pont)**
ezért $KA \parallel BC$. **(2 pont)**

b) Mivel $KA \parallel CE$, ezért $\widehat{KAC} = \widehat{ACE}$ (belső váltószögek) **(2 pont)**
és az $AKP$ illetve $CEP$ egyenlő szárú háromszögek, ezért $\widehat{APK} = \widehat{CPE}$. **(2 pont)**
Mivel $A$, $P$ és $C$ kollineáris pontok, ezért $K$, $P$ és $E$ pontok is kollineárisak. **(2 pont)**

c) Mivel a $PNE$ félkörbe írt háromszög, ezért $NP \perp KE$. **(2 pont)**
És $FMP$ is egy félkörbe írt háromszög, ezért $PM \perp FM$. **(2 pont)**
Tehát $(\widehat{KE, FM}) = \widehat{MPN}$, mert merőleges szárú szögek. **(2 pont)**




■

Hivatalból összesen: 10 pont.

További pontszám összesen: 90 pont.

**FONTOS TUDNIVALÓ!**
**Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.**