MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 24.

VIII. osztály

1. feladat (30 pont). a) Határozd meg azokat az $(x; y)$ egész számpárokat, amelyekre:

$$(x^2 - 4x + 6)(2y^2 - 2y + 1) = 3\,.$$

b) Határozd meg azokat az x és y valós számokat, amelyekre

$$(x^2 - 4x + 6)(2y^2 - 2y + 1) = 1\,.$$

Mátéfi István, Marosvásárhely

Első megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) A megadott egyenletet beszorozva kettővel az $(x^2 - 4x + 6)(4y^2 - 4y + 2) = 6$ egyenletet kapjuk. Ekkor a tényezőkben kialakíthatunk teljes négyzeteket:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 6 &= x^2 - 4x + 4 + 2 = (x-2)^2 + 2 \geq 2 \\ 4y^2 - 4y + 2 &= 4y^2 - 4y + 1 + 1 = (2y-1)^2 + 1 \geq 1\,. \end{aligned}$$ **(3 pont)**

Mivel x, y egészek, a szorzat mindkét tényezője pozitív, így mindkét tényező természetes is. Tehát a következő eseteket kell megvizsgálni:

I. eset:$(x-2)^2 + 2 = 2, (2y-1)^2 + 1 = 3$

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + 2 = 2 &\Longrightarrow (x-2)^2 = 0 \Longrightarrow x = 2 \\ (2y-1)^2 + 1 = 3 &\Longrightarrow (2y-1)^2 = 2 \Longrightarrow y \notin \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$ **(3 pont)**

II. eset: $(x-2)^2 + 2 = 3, (2y-1)^2 + 1 = 2$

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + 2 = 3 &\Longrightarrow (x-2)^2 = 1 \Longrightarrow x \in \{1; 3\} \\ (2y-1)^2 + 1 = 2 &\Longrightarrow (2y-1)^2 = 1 \Longrightarrow y \in \{0; 1\}\,. \end{aligned}$$ **(3 pont)**

III. eset: $(x-2)^2 + 2 = 6, (2y-1)^2 + 1 = 1$

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + 2 = 6 &\Longrightarrow (x-2)^2 = 4 \Longrightarrow x \in \{0; 4\} \\ (2y-1)^2 + 1 = 1 &\Longrightarrow (2y-1)^2 = 0 \Longrightarrow y \notin \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$ **(3 pont)**

Tehát $(x; y) \in \{(1; 0), (1; 1), (3; 0), (3; 1)\}$. **(3 pont)**

b) A megadott egyenletet beszorozva kettővel a következő egyenletet kapjuk:

$$(x^2-4x+6)(4y^2-4y+2)=2$$

$$\left((x-2)^2+2\right)\left((2y-1)^2+1\right)=2 \qquad \textbf{(3 pont)}$$

$$(x-2)^2(2y-1)^2+(x-2)^2+2(2y-1)^2+2=2$$

$$\left((x-2)(2y-1)\right)^2+(x-2)^2+2(2y-1)^2=0, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

de minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left((x-2)(2y-1)\right)^2 \geq 0,\ (x-2)^2 \geq 0,\ 2(2y-1)^2 \geq 0,$$

tehát

$$\left((x-2)(2y-1)\right)^2=0, (x-2)^2=0,\ 2(2y-1)^2=0, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

azaz $x-2=0$ és $2y-1=0$.

Vagyis $x-2=0 \Longrightarrow x=2$, $2y-1=0 \Longrightarrow y=\dfrac{1}{2}$. **(3 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a) Ha $x, y \in \mathbb{Z}$, akkor $x^2-4x+6, 2y^2-2y+1 \in \mathbb{Z}$. Észrevehető, hogy $x^2-4x+6=(x-2)^2+2$, így $x^2-4x+6 \geq 2$, tehát a 3-nak csak a $3 \cdot 1$ felbontását kell megvizsgálnunk. **(6 pont)**
Ez a következő esetet jelenti:

$$x^2-4x+6=3 \implies x^2-4x+3=0 \implies x_1=1; x_2=3 \qquad \textbf{(3 pont)}$$

$$2y^2-2y+1=1 \implies 2y^2-2y=0 \implies y^2-y=0 \implies y_1=0; y_2=1. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Ebből következik, hogy a megoldások: $(x;y) \in \{(1;0),(1;1),(3;0),(3;1)\}$. **(3 pont)**

b) Az *a)* alponthoz hasonlóan $x^2-4x+6 \geq 2$.

Beszorozva kettővel az $2y^2-2y+1$ kifejezést kapjuk, hogy $4y^2-4y+2=(2y-1)^2+1 \geq 1$.

Innen következik, hogy $(x^2-4x+6)(4y^2-4y+2) \geq 2 \cdot 1$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. **(6 pont)**
Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x^2-4x+6=2$ és $4y^2-4y+2=1$, vagyis $(x-2)^2=0$ és $(2y-1)^2=0$. Ez csak $x=2$ és $y=\frac{1}{2}$ esetén lehetséges, tehát a $(2;\frac{1}{2})$ számpár az egyetlen megoldás. **(6 pont)**

■

2. feladat (30 pont). Adott a $VABCD$ szabályos négyoldalú gúla. Az alapban az átlók metszéspontja O, a P pont pedig az O pont vetülete a VBC síkra.

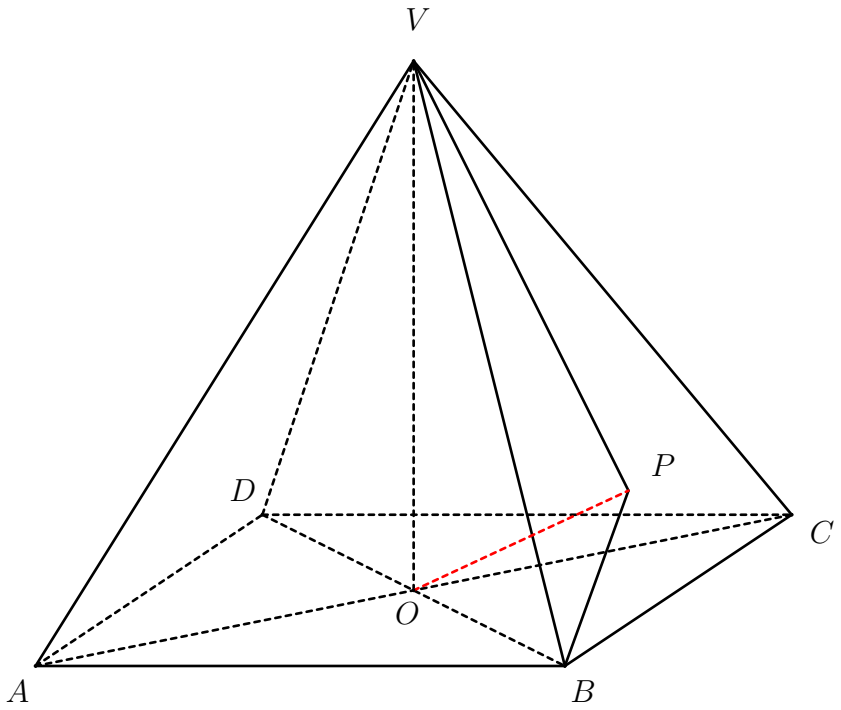
a) Igazold, hogy a P magasságpont a VBC háromszögben!

b) Legyen $AB=2a$ és $VA=3a$, illetve $BP \cap VC=\{N\}$. Határozd meg a BND sík és az alapsík által közrezárt szög koszinuszát!

Hamar Erzsébet, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

a)



Mivel $OP \perp (VBC)$ és $BC \subset (VBC)$, így $OP \perp BC$.

Mivel $VO \perp (ABC)$ és $BC \subset (ABC)$, így $VO \perp BC$.

Ekkor $BC \perp OP, BC \perp VO$, valamint $OP, VO \subset (VOP)$ és $OP \cap VO = \{O\}$, így

$$BC \perp (VOP)\,.$$

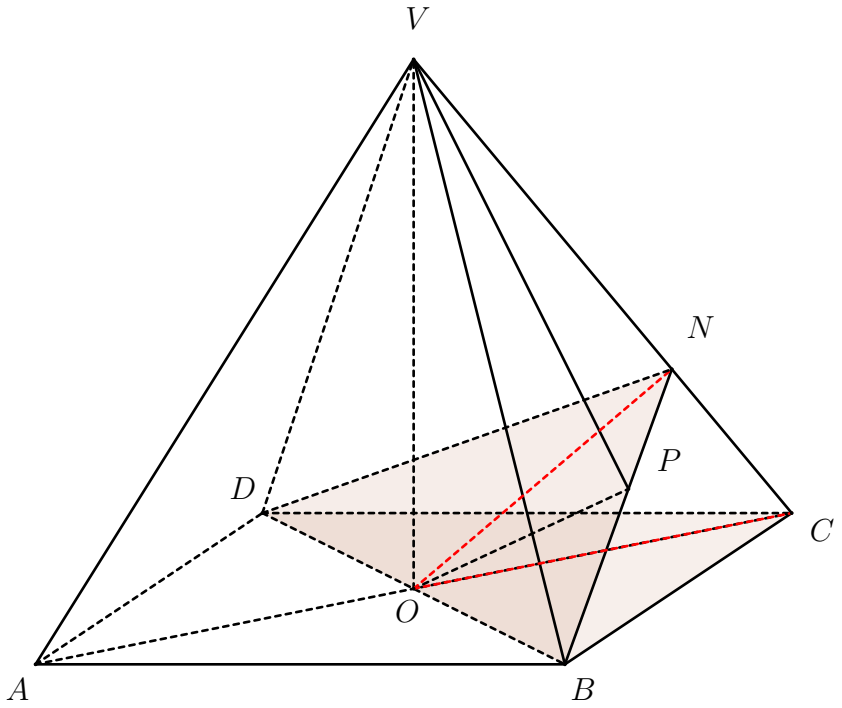
A $BC \perp (VOP), VP \subset (VOP) \Longrightarrow BC \perp VP$, így VP magasság a VBC háromszögben. **(3 pont)**
Másrészt $OB \perp OC, OB \perp OV$, illetve $OC, OV \subset (VOC)$ és $OC \cap OV = \{O\}$, így $OB \perp (VOC)$.
Mivel $VC \subset (VOC)$ ezért $OB \perp VC$. **(3 pont)**
Viszont $OP \perp (VBC)$ és $VC \subset (VBC)$, ezért $OP \perp VC$. Ekkor $VC \perp OB, VC \perp OP$, valamint $OB, OP \subset (BOP)$ és $OB \cap OP = \{O\}$, így

$$VC \perp (BOP)\,. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Mivel $VC \perp (BOP), BP \subset (BOP) \Longrightarrow VC \perp BP$, vagyis BP magasság a VBC háromszögben.

Tehát a VBC háromszögben magasság a VP, és magasság a BP, valamint $VP \cap BP = \{P\}$ így P magasságpont a VBC háromszögben. **(3 pont)**

b)



A BND háromszögben szimmetria miatt $BN = DN$ vagyis a háromszög egyenlő szárú. Az O a BD szakasz felezőpontja, tehát $NO \perp BD$. Mivel O az alapsíkban a négyzet átlóinak metszéspontja, ezért $CO \perp BD$.

Mivel $(BND) \cap (DBC) = BD$, valamint $NO \perp BD, NO \subset (BND)$ és $CO \perp BD, CO \subset (DBC)$ így

$$\left(\widehat{(BND),(DBC)}\right) = \widehat{(NO,CO)} = \widehat{NOC}\,. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Az (a) alpont alapján $BN \perp VC$, de a szimmetria miatt $DN \perp VC$, valamint $BN, DN \subset (BND)$ és $BN \cap DN = \{N\}$, így

$$VC \perp (BND) \text{ és } ON \subset (BND) \Longrightarrow VC \perp ON \Longrightarrow \widehat{ONC} = 90^\circ \Longrightarrow \cos(\widehat{NOC}) = \frac{ON}{OC}. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

A VOC derékszögű háromszögben $\widehat{VOC} = 90^\circ$, ahonnan

$$\begin{aligned} VC^2 &= VO^2 + OC^2 \\ 9a^2 &= VO^2 + 2a^2 \\ VO^2 &= 7a^2 \\ VO &= a\sqrt{7}\,. \end{aligned} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

A VOC derékszögű háromszögben ON magasság, ahonnan

$$ON = \frac{VO \cdot OC}{VC} = \frac{a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{2}}{3a} = \frac{a\sqrt{14}}{3}\,. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Tehát $\cos(\widehat{NOC}) = \dfrac{ON}{OC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{14}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **(3 pont)**

■

3. feladat (20 pont). Marcika leírta a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{50}$ számokat különböző oszlopokba úgy, hogy bármelyik két oszlopot választja ki, legyen az oszlopoknak legalább egy-egy eleme, amit össze lehet adni. Marcika a $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ számokat pontosan akkor tudja összeadni, ha a gyökök alól ki tud emelni természetes számokat úgy, hogy a gyökök alatt ugyanaz maradjon mindkét számban. Például a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ számokat össze tudja adni, de a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{6}$ számokat nem.

a) Igazold, hogy a számok beírhatóak 9 oszlopba a fenti szabályok szerint!

b) Igazold, hogy a számok nem írhatóak be 10 oszlopba a fenti szabályok szerint!

Köncse Balázs, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a) Összeadhatóak a $\sqrt{2}, \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ és a $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ számok.

Összeadhatóak a $\sqrt{3}, \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ és a $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ számok.

Összeadhatóak a $\sqrt{5}, \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ és a $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ számok.

Összeadhatóak a $(\sqrt{6}, \sqrt{24} = 2\sqrt{6}), (\sqrt{7}, \sqrt{28} = 2\sqrt{7}), (\sqrt{10}, \sqrt{40} = 2\sqrt{10}), (\sqrt{11}, \sqrt{44} = 2\sqrt{11})$ számpárok tagjai. **(2 pont)**

Illetve összeadhatóak a természetes számok. A számok között van hét darab természetes szám a $\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4, \sqrt{25} = 5, \sqrt{36} = 6, \sqrt{49} = 7$. Ha ezeket mind külön oszlopokba írjuk be, akkor ezen hét oszlop közül bármelyik kettőből össze lehet adni két számot. Legyenek ezek például az 1-7 számú oszlopok. **(2 pont)**

Ekkor a többi számot úgy kell beírnunk a táblázatba, hogy a 8. és a 9. számú oszlopokhoz bármelyik oszlopot választva legyenek összeadható számok úgy, hogy az egyik az egyik oszlopban van, a másik szám pedig a másik oszlopban.

Megjegyzés. A továbbiakban azt mondjuk, hogy egy oszlop *le van fedve*, ha a többi oszlop közül bármelyikkel választva van összeadható pár. Továbbá összeadható pár alatt olyan párt értünk, amelynek a tagjai összeadhatók.

A 8. és a 9. oszlopba is kell egy összeadható pár, legyen mondjuk a $\sqrt{2}$-t tartalmazók. Ekkor a még szabad három $\sqrt{2}$-t tartalmazó számot beírjuk például az 1., 2. és 3. oszlopba. Így az 1., 2. és 3. oszlop le van fedve. **(2 pont)**

Ezután szintén a 8. és 9. oszlopba írjunk egy-egy $\sqrt{3}$-t tartalmazó számot és a még szabad két $\sqrt{3}$-t tartalmazó számot beírjuk például a 4. és 5. oszlopba. Így a 4. és 5. oszlop le van fedve. **(2 pont)**

Ismét a 8. és 9. oszlopba írjunk egy-egy $\sqrt{5}$-t tartalmazó számot és a még szabad $\sqrt{5}$-t tartalmazó számot beírjuk például a 6. oszlopba. Így a 6. oszlop is le van fedve. **(2 pont)**

Mivel már csak közös gyököt tartalmazó számpárok maradtak így ezeket párosával kell írnunk úgy, hogy az egyiket a 8. és a 9. oszlop valamelyikébe, a másikat a 7. oszlopba. Például a $\sqrt{6}$-ot tartalmazó számpárt beírjuk a 7. és a 8. oszlopokba, a $\sqrt{7}$-et tartalmazó számpárt pedig beírjuk a 7. és a 9. oszlopokba. Így az összes oszlop le van fedve. **(2 pont)**

A következő felírás megfelelő:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{49}$		
$\sqrt{2}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{18}$					$\sqrt{32}$	$\sqrt{50}$
			$\sqrt{3}$	$\sqrt{12}$			$\sqrt{27}$	$\sqrt{48}$
					$\sqrt{5}$		$\sqrt{20}$	$\sqrt{45}$
						$\sqrt{6}$	$\sqrt{24}$	
						$\sqrt{7}$		$\sqrt{28}$

A fennmaradó számokat bárhova beírhatjuk.

Megjegyzés. A táblázat helyes kitöltésére csak 8 pont kapható a 12 pontból, amennyiben a leírásból nem derül ki, hogy a kitöltés valóban teljesíti a feltételeket.

b) Ha létezne egy 10 oszlopos kitölthető táblázat, akkor bármely két oszlophoz tartozna legalább egy olyan számpár, amelyet összeadható számok alkotnak. Az oszlopokat számozzuk meg balról jobbra 1-től 10-ig. Az első oszlophoz 9 másik oszlopot párosíthatunk, a másodikhoz további 8-at, a harmadikhoz további 7-et és így tovább. **(2 pont)**
Összesen tehát

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$$

különböző számpárra lenne szükség. **(2 pont)**

Másrészt megszámoljuk az összeadható párokat. A $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{36}, \sqrt{49}$ számok összeadhatók, ezekből összesen $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ számpár képezhető.

Összeadhatóak a $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \sqrt{50}$ számok, ezekből összesen $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ számpár képezhető.

Összeadhatóak a $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}$ számok, ezekből összesen $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ számpár képezhető.

Összeadhatóak a $\sqrt{5}, \sqrt{20}, \sqrt{45}$ számok, amelyekből $\frac{3\cdot 2}{2}=3$ számpár képezhető.

Valamint összeadhatóak a $(\sqrt{6}, \sqrt{24}), (\sqrt{7}, \sqrt{28}), (\sqrt{10}, \sqrt{40}), (\sqrt{11}, \sqrt{44})$ számpárok, ami további 4 számpár.

Ez összesen:

$$21+10+6+3+4=44$$

számpár, ami kevesebb, mint a számunkra szükséges 45 számpár, ezért nem lehetséges a kitöltés. **(2 pont)**

■

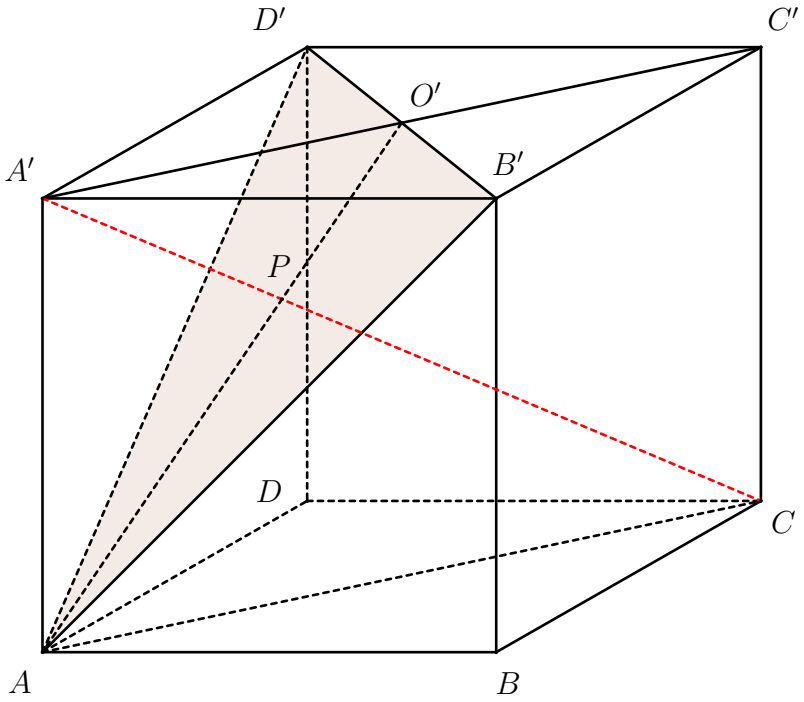
4. feladat (20 pont). a) Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka, amelynek az éle a. Határozd meg az A' pont távolságát az $AB'D'$ síktól!

b) Adott az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest. Igazold, hogy az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest akkor és csakis akkor kocka, ha $A'C \perp (AB'D')$.

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

a)



Legyen O' az $A'B'C'D'$ középpontja és P az A' vetülete az AO'-re. Így

$$A'P \perp AO'. \tag{1}$$

(2 pont)

Tudjuk, hogy $AA' \perp (A'B'C')$ és $B'D' \subset (A'B'C')$, ezért $AA' \perp B'D'$.

Másrészt $B'D' \perp AA'$ és $B'D' \perp A'O'$, valamint $A'O' \cap AA' = \{A'\}$, $A'O', AA' \subset (A'AO')$, tehát $B'D' \perp (A'AO')$.

Emellett $A'P \subset (A'AO')$, ezért

$$B'D' \perp A'P. \tag{2}$$

(2 pont)

Mivel $AO' \cap B'D' = \{O'\}$ és $AO', B'D' \subset (AB'D')$, az (1) és (2) alapján $A'P \perp (AB'D')$.

Ahonnan $d(A', (AB'D')) = A'P$. **(2 pont)**

Ezen kívül $A'O' \parallel AC$, ahonnan $A'PO'_\Delta \sim CPA_\Delta$, így:

$$\frac{A'P}{CP} = \frac{PO'}{PA} = \frac{A'O'}{CA}$$
$$\frac{A'P}{CP} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{A'P}{A'C - A'P} = \frac{1}{2} \Longrightarrow A'P = \frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

b) „⇒”
Feltételezzük, hogy $ABCDA'B'C'D'$ kocka. $B'D' \perp A'C'$ és $B'D' \perp AA'$, ezért $B'D' \perp (AC'A')$. Mivel $A'C \subset (AC'A')$, ezért $B'D' \perp A'C$, azaz

$$A'C \perp B'D' \tag{3}$$

Az $AA'O'_\Delta \sim CAA'_\Delta$, mert $\frac{AA'}{AC} = \frac{A'O'}{AA'}$és $\widehat{O'A'A} = \widehat{A'AC}$, ezért $\widehat{A'AO'} = \widehat{ACA'}$. **(2 pont)**

Mivel $A'O' \parallel AC$, létezik az $A'C \cap AO' = \{P\}$ pont.
Mivel $\widehat{PA'A} + \widehat{A'AP} = \widehat{CA'A} + \widehat{ACA'} = 90°$, következik, hogy

$$A'C \perp AO' \tag{4}$$

Mivel $B'D' \cap AO' = \{O'\}$, így az (3) és (4) alapján következik, hogy $A'C \perp (AB'D')$. **(2 pont)**

„⇐”
Feltételezzük, hogy $ABCDA'B'C'D'$ téglatest és $A'C \perp (AB'D')$.
Mivel $B'D' \subset (AB'D')$, ezért

$$A'C \perp B'D' \,. \tag{5}$$

Továbbá $AA' \perp (A'B'D')$ és $B'D' \subset (A'B'D')$, ezért

$$AA' \perp B'D' \,. \tag{6}$$

Mivel $A'C \cap AA' = \{A'\}$, így a (5) és (6) alapján $B'D' \perp (AC'A')$. Ekkor mivel $A'C' \subset (AC'A')$, ezért $B'D' \perp A'C'$. Az $A'B'C'D'$ téglalapban az átlók merőlegesek, tehát $A'B'C'D'$ négyzet. Emiatt:

$$A'B' = A'D' \tag{7}$$

(2 pont)

Mivel $CD \perp (ADD')$ és $AD' \subset (ADD')$, ezért

$$CD \perp AD'. \tag{8}$$

Mivel $A'C \perp (AB'D')$ és $AD' \subset (AB'D')$, ezért

$$AD' \perp A'C. \tag{9}$$

Mivel $CD \cap A'C = \{C\}$, így a (8) és a (9) alapján $AD' \perp (A'DC)$, de $A'D \subset (A'DC)$, ezért $AD' \perp A'D$. Így az $ADD'A'$ téglalap is négyzet, tehát

$$A'A = A'D'. \tag{10}$$

(2 pont)

A (7) és a (10) alapján az $ABCDA'B'C'D'$ kocka. **(2 pont)**

■

a) alpont második megoldása.
Jelölje d az A' pont távolságát az $(AB'D')$ síktól. Ekkor az $A'AB'D'$ gúla térfogatát felírhatjuk mint

$$V = \frac{1}{3}d \cdot T_{AB'D'} = \frac{1}{3}(A'D') \cdot T_{A'B'A}. \qquad \textbf{(4 pont)}$$

Az $AB'D'$ háromszög egyenlő oldalú, és oldalhossza $AB\sqrt{2}$. Ekkor

$$d \cdot \frac{(AB\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{AB^3}{2}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

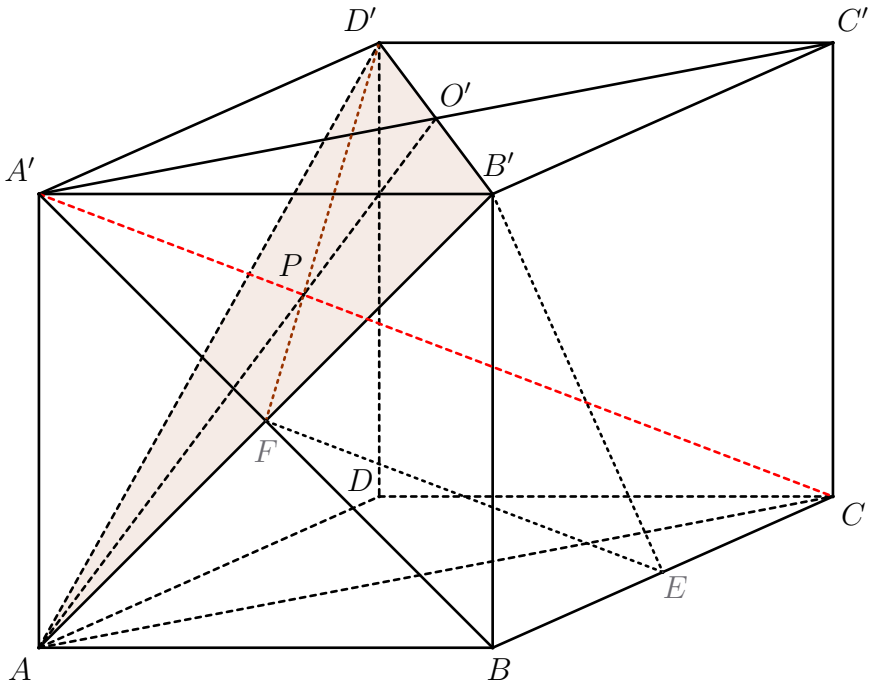
Tehát $d = AB\frac{\sqrt{3}}{3}$, vagyis $d = a\frac{\sqrt{3}}{3}$. **(2 pont)**

■

b) alpont második megoldása.
„⇒”
Feltételezzük, hogy $ABCDA'B'C'D'$ kocka. Az $A'AB'D'$ szabályos háromoldalú gúla, mert az $AB'D'_\Delta$ egyenlő oldalú és $A'A = A'B' = A'D'$. Így az A'-ből húzott magasság P talppontja az $AB'D'_\Delta$ súlypontjába esik. **(2 pont)**

Ugyanígy a $CAB'D'$ is szabályos háromoldalú gúla (a C-ből húzott magasság szintén a P pontba esik).
Ekkor $A'P \perp (AB'D')$, és $CP \perp (AB'D')$, ezért A', P, C pontok kollineárisak, így $A'C \perp (AB'D')$.

(2 pont)



„⇐”
Feltételezzük, hogy $ABCDA'B'C'D'$ téglatest és $A'C \perp (AB'D')$. Legyen E a BC él felezőpontja, F pedig az $ABB'A'$ lap középpontja (így F az AB' átló felezőpontja). Ekkor EF a $BA'C_\Delta$ középvonala, tehát $EF \parallel A'C$. Mivel $A'C \perp AB'$, ezért $EF \perp AB'$.
Mivel F az AB' szakasz felezőpontja, ezért $FA = FB'$. Így az EAB'_Δ egyenlő szárú, ezért $EA = EB'$. Következik, hogy $EBA_\Delta \equiv EBB'_\Delta$ (átfogó-befogó eset), tehát

$$AB = BB'. \tag{11}$$

(**2 pont**)

Mivel $A'C \perp (AB'D')$ és $EF \parallel A'C$, ezért $EF \perp (AB'D')$, tehát $EF \perp FD'$.
Ezért $\widehat{EFB} + \widehat{D'FA'} = 90°$, így $\widehat{EFB} = \widehat{FD'A'}$ és $\widehat{EBF} = \widehat{FA'D'}$, tehát $EBF_\Delta \sim FA'D'_\Delta$.
A hasonlóságból $\dfrac{EB}{FA'} = \dfrac{BF}{A'D'} \Longrightarrow EB \cdot A'D' = FA' \cdot BF.$ (**2 pont**)

Továbbá E felezőpont, ezért $EB = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{A'D'}{2}$, és az (1) miatt az $ABB'A'$ lap négyzet, így $BF = FA' = \dfrac{AA'\sqrt{2}}{2}$. Behelyettesítve:

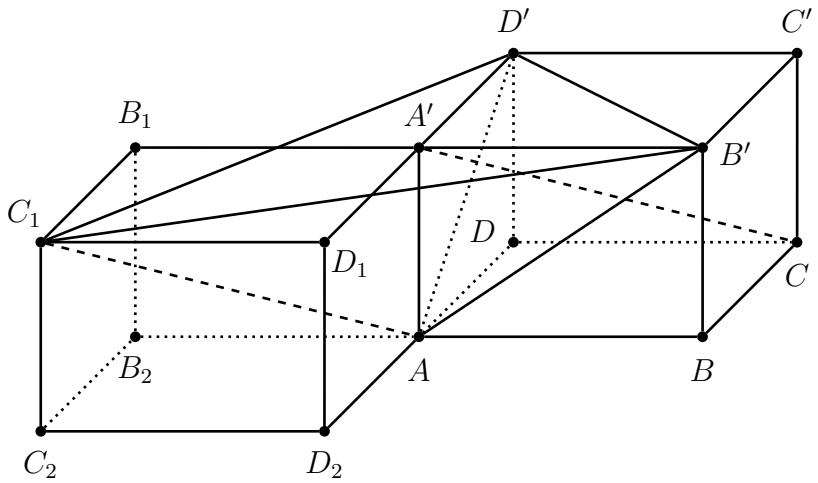
$$\frac{A'D'}{2} \cdot A'D' = \frac{AA'\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{AA'\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow A'D' = AA'. \tag{12}$$

A (11) és a (12) alapján az $ABCDA'B'C'D'$ kocka. (**2 pont**)

■

b) alpont harmadik megoldása.

Szerkesszük meg az $AB_2C_2D_2A'B_1C_1D_1$ téglatestet úgy, hogy az eredeti téglatest párhuzamos eltolása legyen az AC oldalátló mentén (lásd ábra). (**2 pont**)



Ekkor az $A'C$ egyenes párhuzamos az C_1A egyenessel, tehát $A'C$ merőleges az $(AB'D')$ síkra pontosan akkor ha $C_1A \perp AD'$ és $C_1A \perp AB'$. (**2 pont**)
Ezek a merőlegességek pontosan akkor teljesülnek ha rendre $(C_1D')^2 - (AD')^2 - (AC_1)^2 = 0$ és $(C_1B')^2 - (AB')^2 - (AC_1)^2 = 0$. (**2 pont**)
Jelöljük az AB, AD, AA' oldalak hosszát rendre x, y, z-vel. Ekkor a téglatest átlójának hosszára

felírhatjuk, hogy $(C_1A)^2 = x^2 + y^2 + z^2$. A megfelelő oldallapok átlóinak hosszára kapjuk, hogy $(AB')^2 = x^2 + z^2$, $(AD')^2 = y^2 + z^2$. Továbbá az C_1B_1B' és C_1D_1D' derékszögű háromszögek alapján $(C_1D')^2 = x^2 + (2y)^2$ és $(C_1B')^2 = y^2 + (2x)^2$. Ekkor

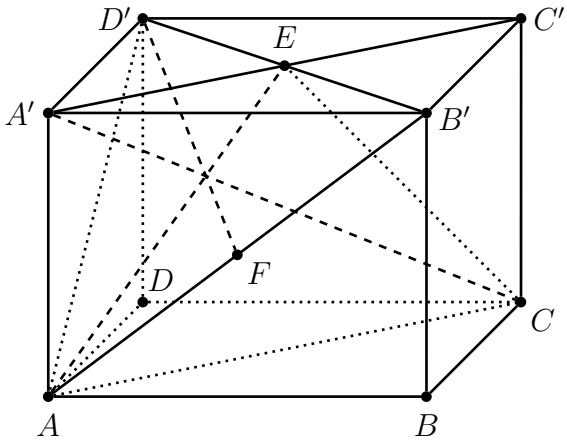
$$(C_1D')^2 - (AD')^2 - (AC_1)^2 = x^2 + (2y)^2 - (y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(y^2 - z^2),$$
$$(C_1B')^2 - (AB')^2 - (AC_1)^2 = y^2 + (2x)^2 - (x^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(x^2 - z^2). \quad \textbf{(2 pont)}$$

Tehát $C_1A \perp AD'$ és $C_1A \perp AB'$ pontosan akkor ha, rendre $y = x$ és $x = z$; vagyis az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest egy kocka. **(2 pont)**

■

b) alpont negyedik megoldása.

Jelölje E, F rendre az $A'B'C'D'$, illetve az $A'B'BA$ oldallapok átlóinak metszéspontját. Ekkor $(AB'D') \cap (A'C'CA) = AE$, és $A'C$ egyenes metszi AE egyenest.
Hasonlóan $(AB'D') \cap (A'D'CB) = D'F$ és $A'C$ metszi a $D'F$ egyenest. **(2 pont)**
Ekkor $A'C$ merőleges az $(AB'D')$ síkra pontosan akkor ha $A'C \perp AE$ és $A'C \perp DF$. **(2 pont)**



Az $A'ECA$ trapéz átlói: $A'C$, AE pontosan akkor merőlegesek egymásra ha a trapéz szemközti oldalainak négyzetösszege megegyezik, vagyis $A'E^2 + AC^2 = A'A^2 + EC^2$. **(2 pont)**

Számítások egyszerűsítése végett, jelölje x, y, z rendre az AB, AD, AA' oldalak hosszait. Ekkor felírhatjuk, hogy $A'E^2 = \dfrac{(A'C')^2}{4} = \dfrac{x^2 + y^2}{4}$, $AC^2 = x^2 + y^2$, $EC^2 = C'E^2 + C'C^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{4} + z^2$. Tehát az $A'ECA$ trapéz ortodiagonális pontosan akkor ha

$$\frac{x^2 + y^2}{4} + x^2 + y^2 = z^2 + \frac{x^2 + y^2}{4} + z^2,$$

vagyis $x^2 + y^2 = 2z^2$. Hasonlóan számolva, az $A'D'CF$ trapéz ortodiagonális ha

$$y^2 + \frac{x^2 + z^2}{4} + y^2 = \frac{x^2 + z^2}{4} + x^2 + z^2,$$

vagyis $x^2 + z^2 = 2y^2$. **(2 pont)**

Tehát $A'C$ merőleges az $(AB'D')$ síkra pontosan akkor ha $x^2 + z^2 = 2y^2$ és $x^2 + y^2 = 2z^2$. A kapott egyenletrendszert ekvivalensen átalakíthatjuk. A másodikból kivonva az elsőt írhatjuk, hogy $y^2 - z^2 = 2(z^2 - y^2)$, vagyis $z = y$. Az első egyenlet így átírva $x^2 + y^2 = 2y^2$, vagyis $x = y$.

Következésképpen $A'C$ merőleges az $(AB'D')$ pontosan akkor, ha $z = y$ és $x = y$, vagyis a téglatest egy kocka. **(2 pont)**

■

Hivatalból összesen: 10 pont.

További pontszám összesen: 90 pont.

FONTOS TUDNIVALÓ!
Az első két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 3-nak többszöröse kell legyen, az utolsó két feladat esetében minden javító minden részpontszáma 2-nek többszöröse kell legyen. Tehát a javítókulcsban megadott pontokat csak akkor lehet felbontani, ha azok 3-nál, illetve 2-nél nagyobbak és ebben az esetben is csak 3, illetve 2 többszöröseire. Ez érvényes az esetleges alternatív megoldásokra is, amelyek a javítókulcsban megadott megoldástól eltérnek.