MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 24.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x+6-4\sqrt{2x-4}}=(x-3)\sqrt{2}$$

egyenletet!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az egyenletben megjelenő kifejezések létezési feltétele alapján:

$$2x-4\geq 0,\quad x+6-4\sqrt{2x-4}\geq 0\quad \text{és}\quad x-3\geq 0,$$

ahonnan $x\in[3,\infty)$. **(1 pont)**
Ha az $y=\sqrt{2x-4}$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor $x=\dfrac{y^2+4}{2}$ és bármely $x\geq 3$ esetén $y\geq\sqrt{2}$. **(1 pont)**

Az egyenlet y-ban

$$\sqrt{\frac{y^2+4}{2}+2y}+\sqrt{\frac{y^2+4}{2}+6-4y}=\left(\frac{y^2+4}{2}-3\right)\sqrt{2},$$ **(1 pont)**

ami átírható

$$\sqrt{\frac{(y+2)^2}{2}}+\sqrt{\frac{(y-4)^2}{2}}=\frac{y^2-2}{\sqrt{2}}$$ **(1 pont)**

alakba, vagyis

$$y+2+|y-4|=y^2-2.$$ **(1 pont)**

Ha $y\in\left[\sqrt{2},4\right]$, akkor $x\in[3,10]$ és az egyenlet

$$y+2-y+4=y^2-2$$ **(1 pont)**

alakba írható, ahonnan $y^2=8$ és így $x=6\in[3,10]$ az adott egyenlet egyik megoldása. **(1 pont)**
Ha $y\in(4,\infty)$, akkor

$$y+2+y-4=y^2-2,$$

vagyis $y^2-2y=0$, ahonnan $y=0\notin(4,\infty)$ vagy $y=2\notin(4,\infty)$. **(1 pont)**
Tehát az egyenlet egyetlen megoldása $x=6$. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Az egyenletben megjelenő kifejezések létezési feltétele alapján:

$$2x-4\geq 0,\quad x+6-4\sqrt{2x-4}\geq 0\quad \text{és}\quad x-3\geq 0,$$

ahonnan $x\in[3,\,\infty)$. **(1 pont)**

Legyen

$$A=\sqrt{x+\sqrt{8x-16}}\quad\text{és}\quad B=\sqrt{x+6-\sqrt{32x-64}}.$$

Felhasználjuk az összetett gyök azonosságát: minden $a,b\geq 0$ és $a^2-b\geq 0$ esetén

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Az $A=\sqrt{x+\sqrt{8x-16}}$ esetén $a=x$ és $b=8x-16$, így

$$c=\sqrt{a^2-b}=\sqrt{x^2-8x+16}=\sqrt{(x-4)^2}=|x-4|,$$

ezért a fenti képlet alapján

$$A=\sqrt{\frac{x+|x-4|}{2}}+\sqrt{\frac{x-|x-4|}{2}}.\qquad\textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan, $B=\sqrt{x+6-\sqrt{32x-64}}$ esetén $a=x+6$ és $b=32x-64$, így

$$c=\sqrt{a^2-b}=\sqrt{(x+6)^2-(32x-64)}=\sqrt{(x-10)^2}=|x-10|,$$

ezért a fenti képlet alapján

$$B=\sqrt{\frac{x+6+|x-10|}{2}}-\sqrt{\frac{x+6-|x-10|}{2}}.\qquad\textbf{(1 pont)}$$

Az egyenlet átírható, mint $A+B=(x-3)\sqrt{2}\iff$

$$\sqrt{\frac{x+|x-4|}{2}}+\sqrt{\frac{x-|x-4|}{2}}+\sqrt{\frac{x+6+|x-10|}{2}}-\sqrt{\frac{x+6-|x-10|}{2}}=(x-3)\sqrt{2}.\quad\textbf{(2 pont)}$$

I. eset. Ha $x\in[3,4)$, akkor $|x-4|=4-x$, $|x-10|=10-x$, ezért

$$A=\sqrt{\frac{x+4-x}{2}}+\sqrt{\frac{x-(4-x)}{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{x-2},$$
$$B=\sqrt{\frac{x+6+10-x}{2}}-\sqrt{\frac{x+6-(10-x)}{2}}=2\sqrt{2}-\sqrt{x-2}.$$

Így $A+B=3\sqrt{2}$, tehát $3\sqrt{2}=(x-3)\sqrt{2}$, ahonnan $x=6$, de $6\notin[3,4)$, tehát ebben az esetben nincs megoldás. **(1 pont)**

II. eset. Ha $x\in[4,10)$, akkor $|x-4|=x-4$, $|x-10|=10-x$, ezért

$$A=\sqrt{\frac{x+x-4}{2}}+\sqrt{\frac{x-(x-4)}{2}}=\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\quad\text{és}\quad B=2\sqrt{2}-\sqrt{x-2}.$$

Ismét $A+B=3\sqrt{2}$, tehát $3\sqrt{2}=(x-3)\sqrt{2}$, ahonnan $x=6$, és $6\in[4,10)$, tehát megoldás. **(1 pont)**

III. eset. Ha $x \in [10, \infty)$, akkor $|x-4| = x-4$, $|x-10| = x-10$, ezért

$$A = \sqrt{x-2} + \sqrt{2} \quad \text{és} \quad B = \sqrt{\frac{x+6-10+x}{2}} - \sqrt{\frac{x+6-x+10}{2}} = \sqrt{x-2} - 2\sqrt{2}.$$

Tehát

$$A + B = 2\sqrt{x-2} - \sqrt{2} \iff 2\sqrt{x-2} - \sqrt{2} = (x-3)\sqrt{2} \iff 2\sqrt{x-2} = (x-2)\sqrt{2}.$$

Mivel $\sqrt{x-2} > 0$, ezért $\sqrt{x-2} = \sqrt{2}$, ahonnan $x = 4$, de $4 \notin [10, \infty)$, tehát ebben az esetben nincs megoldás. **(1 pont)**

Összegezve, az egyenlet egyedüli megoldása $x = 6$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Igazold, hogy ha $x \geq 1$ és $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$, akkor

$$\frac{1}{[\sqrt{x}+2026]-2026} + \frac{1}{\{\sqrt{x}+2026\}} \geq \frac{8}{x+1}.$$

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Mivel

$$[\sqrt{x}+2026]-2026 = [\sqrt{x}]+2026-2026 = [\sqrt{x}]$$
$$\{\sqrt{x}+2026\} = \{\sqrt{x}\} \neq 0, \quad \textbf{(2 pont)}$$

ezért

$$\frac{1}{[\sqrt{x}+2026]-2026} + \frac{1}{\{\sqrt{x}+2026\}} = \frac{1}{[\sqrt{x}]} + \frac{1}{\{\sqrt{x}\}} = \frac{[\sqrt{x}]+\{\sqrt{x}\}}{[\sqrt{x}]\cdot\{\sqrt{x}\}} = \frac{\sqrt{x}}{[\sqrt{x}]\cdot\{\sqrt{x}\}}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Továbbá a számtani és mértani középek közötti egyenlőtlenség alapján

$$[\sqrt{x}]\cdot\{\sqrt{x}\} \leq \left(\frac{[\sqrt{x}]+\{\sqrt{x}\}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 = \frac{x}{4}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

A fenti összefüggések alapján

$$\frac{\sqrt{x}}{[\sqrt{x}]\cdot\{\sqrt{x}\}} \geq \frac{\sqrt{x}}{\frac{x}{4}} = \frac{4}{\sqrt{x}}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Még igazolni kell, hogy

$$\frac{4}{\sqrt{x}} \geq \frac{8}{x+1},$$

ami egyenértékű azzal, hogy

$$(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0,$$

mely állítás igaz. **(2 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Igazold, hogy bármely $x, y, z > 0$ valós számok esetén teljesül a következő egyenlőtlenség

$$(x^2+1)(y^2+1)+(y^2+1)(z^2+1)+(z^2+1)(x^2+1) \geq 4 \cdot (3xyz - x - y - z).$$

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legyen $A = (x^2+1)(y^2+1)+(y^2+1)(z^2+1)+(z^2+1)(x^2+1)$. A következő átalakítást végezzük:

$$\begin{aligned}(x^2+1)(y^2+1) &= x^2y^2+x^2+y^2+1 \\ &= (x^2y^2-2xy+1)+(x^2+y^2+2xy) \\ &= (xy-1)^2+(x+y)^2.\end{aligned}$$

(2 pont)

Felhasználva, hogy bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a^2+b^2 \geq 2ab$ kapjuk, hogy

$$(xy-1)^2+(x+y)^2 \geq 2(xy-1)(x+y) = 2(x^2y+y^2x-x-y). \quad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned}(y^2+1)(z^2+1) &\geq 2(y^2z+z^2y-y-z), \\ (z^2+1)(x^2+1) &\geq 2(z^2x+x^2z-z-x).\end{aligned} \quad \textbf{(2 pont)}$$

Összeadva a fenti egyenlőtlenségeket

$$A \geq 2(x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z-2x-2y-2z). \quad \textbf{(1 pont)}$$

Még igazolni kell, hogy

$$2(x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z-2x-2y-2z) \geq 4 \cdot (3xyz-x-y-z), \quad \textbf{(1 pont)}$$

ami egyenértékű azzal, hogy

$$x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z \geq 6xyz. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ezt elosztva $xyz > 0$-val következik, hogy

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y} \geq 6,$$

ami igaz, mert $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, bármely $a, b > 0$ esetén. **(1 pont)**
■

Második megoldás. Ahhoz, hogy az eredeti egyenlőtlenséget igazoljuk, először belátjuk a következő összefüggést:

$$\begin{aligned}&(x^2+1)(y^2+1)+(y^2+1)(z^2+1)+(z^2+1)(x^2+1)+4(x+y+z) \\ &\qquad \geq 2[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)] \\ \iff\ &x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2+y^2+z^2)+3+4(x+y+z) \geq 2[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)].\end{aligned}$$

(2 pont)

Igazolható, hogy $x^2y^2+x^2+y^2+1+2(x+y)\geq 2xy(x+y)$, amely egyenértékű a következő egyenlőtlenségekkel

$$\begin{aligned} x^2y^2+x^2+y^2+1+2(x+y)-2xy(x+y)&\geq 0,\\ (xy-1)^2+(x+y)^2+2(x+y)(1-xy)&\geq 0,\\ (1-xy+x+y)^2&\geq 0. \end{aligned}$$ **(2 pont)**

A szimmetria miatt hasonlóan igazolható, hogy

$$y^2z^2+y^2+z^2+1+2(y+z)\geq 2yz(y+z)$$

és

$$z^2x^2+z^2+x^2+1+2(z+x)\geq 2zx(z+x).$$ **(1 pont)**

Ezek összeadásával kapjuk a megoldás elején kijelentett egyenlőtlenséget:

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2+y^2+z^2)+3+4(x+y+z)\geq 2[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)]. \quad \text{(A)}$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a jobb oldalára elég igazolni, hogy

$$2[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)]\geq 12xyz, \quad \text{(B)}$$

vagyis

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\geq 6xyz.$$ **(2 pont)**

Ez pedig egyenértékű azzal, hogy

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geq 6,$$

ami igaz, mert $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, bármely $a,b>0$ esetén.
Az (A) és (B) egyenlőtlenségekből következik a kért egyenlőtlenség. **(2 pont)**

Megjegyzés. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$1+x+y=xy,\quad 1+x+z=xz,\quad 1+y+z=yz,\quad x=y=z.$$

Ebből következik, hogy $x^2-2x-1=0$, azaz $x=1+\sqrt{2}$ vagy $x=1-\sqrt{2}$. Mivel a feltétel szerint $x,y,z>0$, ezért $x=y=z=1+\sqrt{2}$.

■

4. feladat (10 pont). Az $ABCD$ konvex négyszög oldalait meghosszabbítjuk úgy, hogy $B'\in(AB$, $BB'=AB$, $C'\in(BC$, $CC'=2BC$, $D'\in(CD$, $DD'=3CD$ és $A'\in(DA$, $AA'=4DA$.

a) Igazold, hogy A az $A'B'C'D'$ négyszög súlypontja!

b) Bizonyítsd be, hogy $T_{A'B'C'D'}>12T_{ABCD}$.

Csapó Hajnalka, Csíkszereda
András Szilárd, Csíkdelne

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

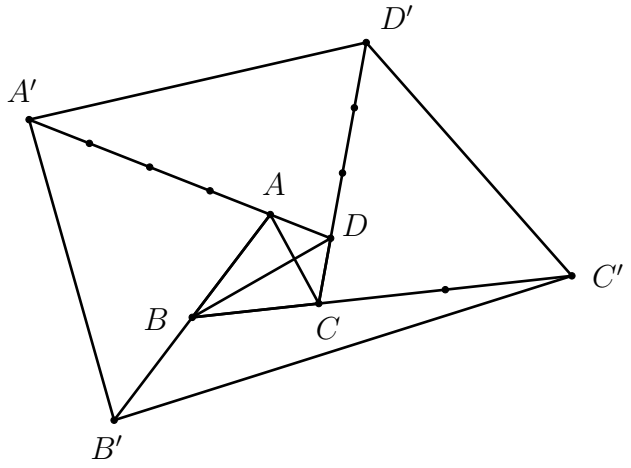
a) Legyen O egy tetszőleges pont a síkban. Kiszámítjuk a feladatban szereplő pontoknak a helyzetvektorát. A feltételek alapján

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} &\implies \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} && \Rightarrow \overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} && \textbf{(1 pont)}\\
\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{BC} &\implies \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB} && \Rightarrow \overrightarrow{OC'} = 3\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB} && \textbf{(1 pont)}\\
\overrightarrow{DD'} = 3\overrightarrow{CD} &\implies \overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OD} - 3\overrightarrow{OC} && \Rightarrow \overrightarrow{OD'} = 4\overrightarrow{OD} - 3\overrightarrow{OC} && \textbf{(1 pont)}\\
\overrightarrow{AA'} = 4\overrightarrow{DA} &\implies \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OD} && \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = 5\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OD}. && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

Ezek alapján

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = 4\overrightarrow{OA},$$

tehát A az $A'B'C'D'$ súlypontja. **(1 pont)**



b) $T_{DD'A'} = \frac{5AD \cdot 3DC}{2} \cdot \sin(\widehat{D}) = 15 \cdot \frac{AD \cdot DC}{2} \cdot \sin(\widehat{D}) = 15T_{ADC}$.

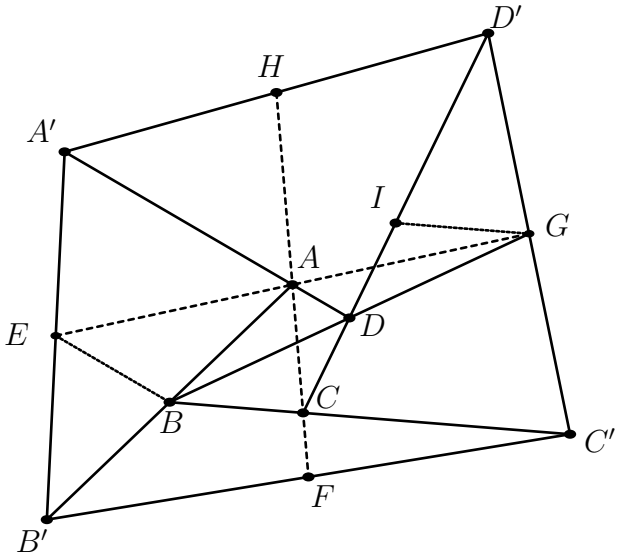
Hasonló módon kapjuk, hogy

$$T_{AA'B'} = 8T_{ABD}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$T_{BB'C'} = 3T_{ABC}, \quad T_{CC'D'} = 8T_{BCD}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
T_{A'B'C'D'} &= T_{AA'B'} + T_{BB'C'} + T_{CC'D'} + T_{DD'A'} + T_{ABCD}\\
&= 8(T_{BCD} + T_{ABD}) + 3(T_{ABC} + T_{ADC}) + T_{ABCD} + 12T_{ADC}\\
&= 12T_{ABCD} + 12T_{ADC}\\
&> 12T_{ABCD}. \qquad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$



■

Második megoldás. a) Ha E, F, G, H rendre az $A'B', B'C', C'D', D'A'$ szakaszok felezőpontjai és I a C pontnak a D pont szerinti szimmetrikusa, akkor IG középvonal a $D'CC'$ háromszögben, tehát az IG szakasz párhuzamos és egyenlő a BC szakasszal. Ennek alapján $IGCB$ paralelogramma, amelynek a BG átlója áthalad az IC átló D felezőpontján. (**2 pont**)
Ugyanakkor az EB szakasz középvonal a $B'AA'$ háromszögben, tehát

$$EB = \frac{1}{2}A'A = \frac{1}{2}(4AD) = 2AD. \qquad (\textbf{1 pont})$$

Mivel D felezi a BG szakaszt és $AD \parallel EB$, ezért az AD szakasz az EBG háromszög középvonala, tehát A az EG felezőpontja. (**1 pont**)
A HG az $A'C'D'$, az EF az $A'C'B'$ háromszögek középvonalai, ezért $HGFE$ paralelogramma. Ebből következik, hogy az A pont a HF szakasz felezőpontja is, amiből következik, hogy az A pont $A'B'C'D'$ négyszög súlypontja. (**1 pont**)

b) Ha bevezetjük a következő jelöléseket:

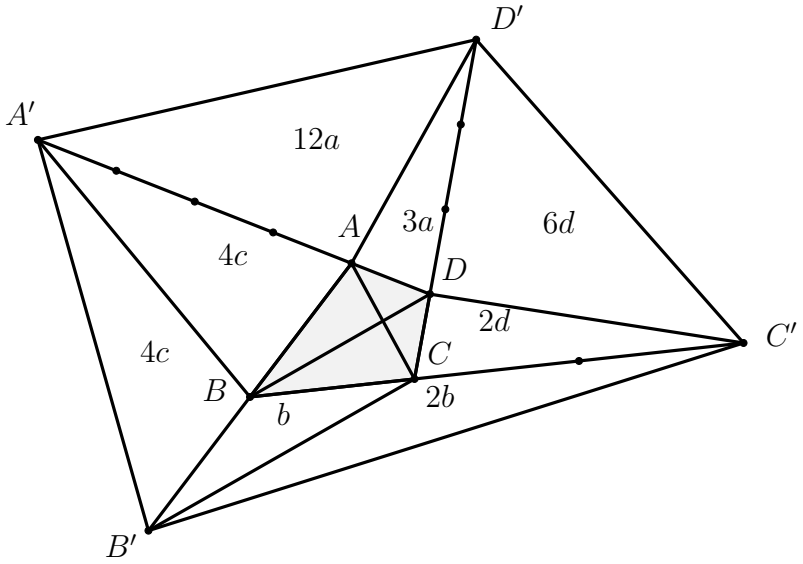
$$T_{ADC} = a, \qquad T_{ABC} = b, \qquad T_{ADB} = c, \qquad T_{DBC} = d,$$

az alábbi összefüggésekhez jutunk:

$$T_{ABCD} = T_{ACD} + T_{ABC} = a + b \quad \text{és}$$
$$T_{ABCD} = T_{ABD} + T_{DCB} = c + d,$$

Mivel $DD' = 3DC$, ezért

$$T_{ADD'} = 3T_{ADC} = 3a. \qquad (\textbf{1 pont})$$



Hasonlóan a további részterületek:

$$\begin{aligned}
T_{AD'A'} &= 4T_{AD'D} = 4 \cdot 3a = 12a,\\
T_{ABA'} &= 4T_{ABD} = 4c,\\
T_{A'BB'} &= T_{A'BA} = 4c,\\
T_{BCB'} &= T_{BCA} = b,\\
T_{B'CC'} &= 2T_{B'CB} = 2b,\\
T_{CDC'} &= 2T_{CDB} = 2d,\\
T_{C'DD'} &= 3T_{C'DC} = 3 \cdot 2d = 6d. \qquad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

Összegezve

$$\begin{aligned}
T_{A'B'C'D'} &= T_{ADD'} + T_{AD'A'} + T_{ABA'} + T_{A'BB'} + T_{BCB'} + T_{B'CC'} + T_{CDC'} + T_{C'DD'} + T_{ADC} + T_{ABC}\\
&= 3a + 12a + 4c + 4c + b + 2b + 2d + 6d + a + b\\
&= 16a + 4b + 8c + 8d\\
&= 4(a+b) + 8(c+d) + 12a\\
&= 4T_{ABCD} + 8T_{ABCD} + 12a\\
&= 12T_{ABCD} + 12a\\
&= 12T_{ABCD} + 12T_{ADC}\\
&> 12T_{ABCD}. \qquad \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

■

Hivatalból összesen: 4 pont.

További pontszám összesen: 36 pont.