MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 25.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat. Adottak $x, y \in \mathbb{R}^*$ úgy, hogy

$$|x| + \frac{25}{|x|} + 16|y| + \frac{1}{4|y|} \leq \left[2\sqrt{7} + 1\right] + 8,$$

ahol $[a]$ az a szám egész részét jelöli. Mutasd ki, hogy

$$\sqrt{\frac{|x|}{|y|} + 22\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 27}$$

természetes szám!

2. feladat. Az ABC egyenlő oldalú háromszögben legyen D az AC szakasz belső pontja, amelyre $AD = k \cdot DC$. A BD egyenesen az E pontot úgy vesszük fel, hogy $BE = (k+1) \cdot DE$ és D a BE szakasz belső pontja. Határozzuk meg a k értékét úgy, hogy AE merőleges legyen az AB egyenesre!

3. feladat. Oldd meg a $(2xy - 10)^2 = 4x^2 + y^2$. egyenletet az egész számok halmazán!

4. feladat. a) Igazold, hogy egy konvex négyszög akkor és csakis akkor ortodiagonális (átlói merőlegesek egymásra), ha szemben fekvő oldalainak négyzetösszege megegyezik!

b) Igazold, hogy ha egy kör köré írható négyszög ortodiagonális, akkor deltoid (az egyik átlója a szimmetriatengelye)!

5. feladat. a) Igazold, hogy az $A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2\}$ halmaznak van két olyan négyelemű diszjunkt részhalmaza, amelyek elemeinek összege egyenlő!

b) Igazold, hogy a $B = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2024^2\}$ halmaznak van két olyan B_1 és B_2 diszjunkt részhalmaza, amelyekre $B_1 \cup B_2 = B$ és B_1 elemeinek összege egyenlő a B_2 elemeinek összegével!

6. feladat. Egy négyzetrácsos lapra rajzolt tetszőleges rácstéglalap felbontása alatt azt értjük, hogy olyan négyzetekre bontjuk, melyek csúcsai rácspontok, oldalaik pedig párhuzamosak a téglalap oldalaival, és amelyek belsejei diszjunktak. A téglalap minden ilyen lehetséges felbontása mellé odaírjuk a felbontásban szereplő legkisebb négyzet oldalhosszát.
Rajzolhat-e Norbi olyan $m \times n$-es téglalapot, amely esetén a leírt számok közül a legnagyobb szám a 2025, illetve az m és n számok legnagyobb közös osztója:
a) 2026, b) 2025, c) 1.

Megjegyzés: Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, hivatalból minden feladatra 1 pont jár.
Munkaidő: 4 óra.