MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 24.

X. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Határozd meg az x valós számokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

$$2026^{x-\frac{\pi}{4}} + 2026^{\frac{\pi}{4}-x} = \sqrt{2}\cdot(\sin x + \cos x)\,.$$

Szilágyi Judit, Kolozsvár
Forgács István, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

A bal oldalon a következő átalakításokat végezzük:

$$2026^{x-\frac{\pi}{4}} + 2026^{\frac{\pi}{4}-x} = 2026^{x-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2026^{x-\frac{\pi}{4}}} \geq 2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

mert $a = 2026^{x-\frac{\pi}{4}} > 0$ és $a + \frac{1}{a} \geq 2$, minden $a > 0$ esetén. **(2 pont)**
Tehát a $2026^{x-\frac{\pi}{4}} + 2026^{\frac{\pi}{4}-x}$ kifejezés minimális értéke 2, amit az $a = 1$ vagyis $x = \frac{\pi}{4}$-re vesz fel. **(1 pont)**

A jobb oldalon a következő átalakításokat végezzük:

$$\sqrt{2}\cdot(\sin x + \cos x) = 2\cdot\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel a szinusz maximális értéke 1, így

$$\sqrt{2}\cdot(\sin x + \cos x) \leq 2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A fentiekből következik, hogy az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldal pontosan 2. A baloldal csak $x = \frac{\pi}{4}$-re veszi fel a 2 értéket. **(1 pont)**
Ha $x = \frac{\pi}{4}$, akkor

$$2\cdot\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 2. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása $x = \frac{\pi}{4}$. **(1 pont)**
■

2. feladat (10 pont). Tekintsük az $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,

$$f(z) = \varepsilon^{2026}\, z + \varepsilon^{2027}\, \overline{z}$$

függvényt, ahol ε harmadrendű egységgyök és $\varepsilon \neq 1$.

a) Igazold, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$f(z) = 2 \cdot \mathrm{Re}(\varepsilon z) \quad \text{és} \quad f(z) + f(\overline{z}) = -2\mathrm{Re}(z).$$

ahol $\mathrm{Re}(z)$ a z komplex szám valós részét jelöli!

b) Igazold, hogy az f függvény szürjektív, de nem injektív!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel $\varepsilon^3 = 1$, így $\varepsilon^{2025} = \varepsilon^{3 \cdot 675} = 1$, ahonnan

$$\varepsilon^{2026} = \varepsilon \quad \text{és} \quad \varepsilon^{2027} = \varepsilon^2. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Továbbá $\varepsilon \neq 1$ harmadrendű egységgyök, ezért $\varepsilon^3 = 1$, ahonnan $\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon}$, illetve modulust véve $|\varepsilon^3| = |\varepsilon|^3 = 1$, ahonnan $|\varepsilon| = 1$. Ezekből következik, hogy

$$\frac{1}{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}.$$

Az $\varepsilon^3 = 1$ alapján $(\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0$, ahonnan az $\varepsilon \neq 1$ alapján

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ezekből következik, hogy

$$f(z) = \varepsilon z + \varepsilon^2 \overline{z} = \varepsilon z + \frac{1}{\varepsilon}\overline{z} = \varepsilon z + \overline{\varepsilon}\,\overline{z} = \varepsilon z + \overline{\varepsilon z} = 2\,\mathrm{Re}(\varepsilon z). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az z helyett $\overline{z}$-t helyettesítve

$$f(\overline{z}) = \varepsilon \overline{z} + \overline{\varepsilon} z. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Összeadva a fenti két összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(z) + f(\overline{z}) &= \varepsilon z + \overline{\varepsilon z} + \varepsilon \overline{z} + \overline{\varepsilon} z \\ &= z(\varepsilon + \overline{\varepsilon}) + \overline{z}(\varepsilon + \overline{\varepsilon}) \\ &= (z + \overline{z})(\varepsilon + \overline{\varepsilon}) \\ &= 2\,\mathrm{Re}\, z(\varepsilon + \varepsilon^2) \\ &= 2\,\mathrm{Re}\, z \cdot (-1) \\ &= -2\,\mathrm{Re}\, z. \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

b) Vizsgáljuk a függvény injektivitását.
A függvény nem injektív, ha létezik $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $f(z_1) = f(z_2)$ azaz $\mathrm{Re}(\varepsilon z_1) = \mathrm{Re}(\varepsilon z_2)$
Legyen $\varepsilon z_1 = a + bi$ és $\varepsilon z_2 = a + ci$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $b \neq c$.
Ekkor $\mathrm{Re}(\varepsilon z_1) = \mathrm{Re}(\varepsilon z_2)$ és $z_1 = \overline{\varepsilon} a + \overline{\varepsilon} bi$ és $z_2 = \overline{\varepsilon} a + \overline{\varepsilon} ci$. Mivel $b \neq c$ esetén a $z_1 \neq z_2$, de $f(z_1) = f(z_2)$, tehát a függvény nem injektív. **(2 pont)**

Vizsgáljuk a függvény szürjektivitását.
Vizsgáljuk meg, hogy minden $y \in \mathbb{R}$ esetén létezik-e $z \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $f(z) = y$. Ekkor

$$2\,\mathrm{Re}(\varepsilon z) = y \iff \varepsilon \cdot z = \frac{y}{2} + ai, \quad a \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$\iff z = \frac{y}{2} \cdot \overline{\varepsilon} + a \cdot \overline{\varepsilon} \cdot i.$$

Az egyenértékű átalakítások miatt minden valós y esetén a fenti $z \in \mathbb{C}$ teljesíti az $y = f(z)$ összefüggést, tehát a függvény szürjektív. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Igazold, hogy:

$$\sqrt[3]{1-\log_{abc} a}+\sqrt[3]{1-\log_{abc} b}+\sqrt[3]{1-\log_{abc} c} \;\geq\; \sqrt[3]{2-2\log_{abc} ab}+\sqrt[3]{2-2\log_{abc} bc}+\sqrt[3]{2-2\log_{abc} ca},$$

bármely $a, b, c \in (1, +\infty)$ esetén! *Kiss Csongor, Kolozsvár*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A logaritmus tulajdonságait felhasználva a következő egyenértékű átalakításokat végezzük:

$$\sqrt[3]{1-\log_{abc} a} = \sqrt[3]{\log_{abc} abc - \log_{abc} a} = \sqrt[3]{\log_{abc} \frac{abc}{a}} = \sqrt[3]{\log_{abc} bc}.$$

Hasonló átalakításokat végzünk a bal oldali kifejezés többi tagjára is:

$$\sqrt[3]{1-\log_{abc} b} = \sqrt[3]{\log_{abc} ac}, \quad \sqrt[3]{1-\log_{abc} c} = \sqrt[3]{\log_{abc} ab}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A jobb oldalon pedig a következő átalakitásokat végezzük.

$$\sqrt[3]{2-2\log_{abc} ab} = \sqrt[3]{2\cdot(1-\log_{abc} ab)} = \sqrt[3]{2\cdot(\log_{abc} c)}.$$

Hasonlóan járunk el a jobb oldali összeg többi tagjával is:

$$\sqrt[3]{2-2\log_{abc} bc} = \sqrt[3]{2\cdot(\log_{abc} a)}, \quad \sqrt[3]{2-2\log_{abc} ca} = \sqrt[3]{2\cdot(\log_{abc} b)}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az átalakítások elvégzése után az egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$\sqrt[3]{\log_{abc} ab} + \sqrt[3]{\log_{abc} bc} + \sqrt[3]{\log_{abc} ca} \;\geq\; \sqrt[3]{\log_{abc} a^2} + \sqrt[3]{\log_{abc} b^2} + \sqrt[3]{\log_{abc} c^2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Beszorozva az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\sqrt[3]{(\lg abc)} > 0$-val, azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[3]{\lg a+\lg b}+\sqrt[3]{\lg b+\lg c}+\sqrt[3]{\lg c+\lg a} \;\geq\; \sqrt[3]{2\lg a}+\sqrt[3]{2\lg b}+\sqrt[3]{2\lg c}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Használva az $x = \lg a,\ y = \lg b,\ z = \lg c$ $(x, y, z > 0)$ jelöléseket írhatjuk, hogy:

$$\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{y+z}+\sqrt[3]{z+x} \geq \sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Elosztva az egyenlőtlenséget $\sqrt[3]{2}$-vel, azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[3]{\frac{x+y}{2}}+\sqrt[3]{\frac{y+z}{2}}+\sqrt[3]{\frac{z+x}{2}} \geq \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}$$
$$\iff \sqrt[3]{\frac{x+y}{2}}+\sqrt[3]{\frac{y+z}{2}}+\sqrt[3]{\frac{z+x}{2}} \geq \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\frac{\sqrt[3]{y}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{2}+\frac{\sqrt[3]{z}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt[3]{z}}{2}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right).$$

(**1 pont**)

Tehát elegendő bizonyítani, hogy

$$\sqrt[3]{\frac{u+v}{2}} \geq \frac{\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}}{2}, \quad \forall\, u,v>0. \qquad (\textbf{1 pont})$$

Az egyenlőtlenség bizonyítható, felhasználva, hogy az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$ függvény konkáv a $(0,+\infty)$ intervallumon, ezért a Jensen-egyenlőtlenség alapján:

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \geq \frac{f(u)+f(v)}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{u+v}{2}} \geq \frac{\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}}{2}. \qquad (\textbf{1 pont})$$

Megjegyzés. Az egyenlőtlenség bizonyítható elvégezve a következő egyenértékű átalakításokat:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{u+v}{2}} &\geq \frac{\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}}{2},\\ \frac{u+v}{2} &\geq \frac{u+v+3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v})}{8},\\ 3(u+v) &\geq 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}).\end{aligned}$$

Elosztva az egyenlőtlenséget $3(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v})>0$-val, azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt[3]{u^2}-\sqrt[3]{uv}+\sqrt[3]{v^2}\geq\sqrt[3]{uv} \iff (\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v})^2\geq 0,$$

mely állítás igaz bármely $u,v>0$ esetén.

■

4. feladat (10 pont). a) Legyen O a komplex számsík kezdőpontja (origója), B és C a sík két olyan pontja amelyre az OBC háromszög pozitív körbejárású. Igazold, hogy az OBC háromszög H magasságpontjának affixuma

$$h = i\cdot(b-c)\cdot \operatorname{ctg}(\alpha),$$

ahol b és c a B, illetve a C pont affixuma, és α a BOC szög mértéke!

b) Az $ABCD$ konvex négyszög átlói nem merőlegesek egymásra és az O pontban metszik egymást. Legyen S_1 az OAB és S_2 az OCD háromszög súlypontja, illetve H_1 az OBC, H_2 pedig az OAD háromszög magasságpontja. Igazold, hogy:

$$S_1S_2 \perp H_1H_2.$$

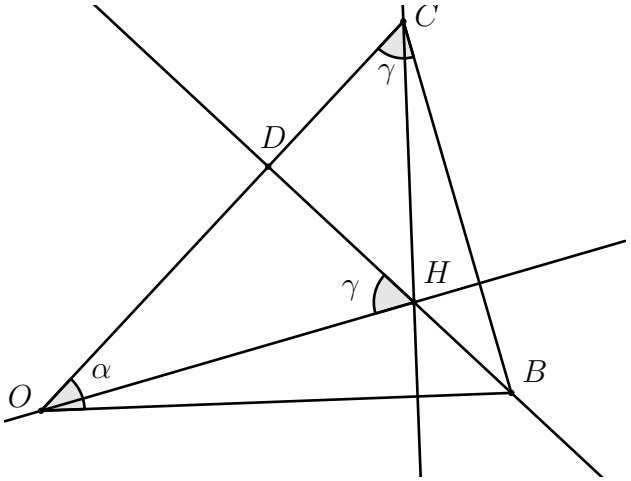
Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) I. Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor H egybeesik az O ponttal, és ezért

$$h = 0 = i\cdot(b-c)\cdot \operatorname{ctg} 90^\circ.$$

II. Ha $\alpha < 90^\circ$, akkor tekintsük a következő ábrát:



Legyen BD szakasz a háromszög magassága, ahol $D \in OC$. Legyen $\widehat{BOC} = \alpha$ és $\widehat{OCB} = \widehat{OHD} = \gamma$. Felírjuk a szinusztételt az OBC háromszögben:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{OB}{\sin\gamma}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az ODH háromszögben

$$OD = OH \cdot \sin\gamma.$$

A BDO háromszögben

$$OD = OB\cos\alpha. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Innen kapjuk, hogy

$$OH = \frac{OD}{\sin\gamma} = \frac{OB\cdot\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha = BC\cdot\operatorname{ctg}\alpha.$$

Tehát

$$OH = BC\cdot\operatorname{ctg}\alpha. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

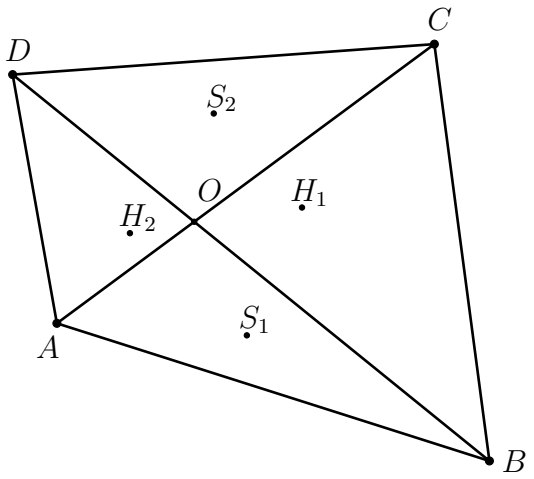
Mivel $OH \perp BC$ a BC vektort $-90°$-kal kell elforgatni a B pont körül, ahhoz, hogy annak képe a $\overrightarrow{BC'}$ és az $\overrightarrow{OH}$ azonos irányításúak legyenek, ezért

$$h = -i\cdot(c-b)\cdot\operatorname{ctg}\alpha = i\cdot(b-c)\cdot\operatorname{ctg}\alpha. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

III. Abban az esetben, ha $\alpha > 90°$, akkor

$$h = i\cdot(c-b)\cdot|\operatorname{ctg}\alpha| = i\cdot(c-b)\cdot(-\operatorname{ctg}\alpha) = i\cdot(b-c)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Tehát h mindhárom esetben a $h = i\cdot(b-c)\operatorname{ctg}\alpha$ képlettel adható meg. **(1 pont)**



b)

Legyen az átlók metszéspontja az O, a koordinátarendszer kezdőpontja. Jelöljük a négyszög csúcsainak affixumait a megfelelő kisbetűkkel, azaz a, b, c, d-vel, a súlypontokét s_1, s_2-vel, a magasságpontokét pedig h_1, h_2-vel.

A súlypontok affixumai:

$$s_1 = \frac{a+b}{3}, \quad s_2 = \frac{d+c}{3}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A magasságpontok affixumai az a) alpontban bizonyított összefüggés alapján:

$$h_1 = i(\mathrm{ctg}\alpha)(b-c), \quad h_2 = i(\mathrm{ctg}\alpha)(d-a)$$

ahol α az BOC szög mértéke. **(1 pont)**

Ekkor

$$\frac{h_2-h_1}{s_2-s_1} = \frac{i\cdot \mathrm{ctg}\,\alpha\cdot(d-a) - i\cdot \mathrm{ctg}\,\alpha\cdot(b-c)}{\frac{d+c}{3}-\frac{a+b}{3}} = \frac{3\cdot \mathrm{ctg}\,\alpha\cdot i}{1}\cdot\frac{d-a-b+c}{d+c-a-b} = 3\cdot \mathrm{ctg}\,\alpha\cdot i.$$

(1 pont)

Tehát $\frac{h_2-h_1}{s_2-s_1} = 3\cdot \mathrm{ctg}\,\alpha\cdot i$, ami tiszta imaginárius szám, és ez azt jelenti, hogy:

$$H_1H_2 \perp S_1S_2. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Megjegyzés. A fenti összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$\frac{|h_2-h_1|}{|s_2-s_1|} = 3\cdot|\mathrm{ctg}\alpha|, \quad \text{azaz, hogy} \quad H_1H_2 = 3\cdot|\mathrm{ctg}\alpha|\cdot S_1S_2.$$

■

Hivatalból összesen: 4 pont.

További pontszám összesen: 36 pont.