MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 25.

X. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). Az A halmaz az olyan nyolcjegyű pozitív egész számok halmaza, amelyek első öt számjegyének a szorzata 2025 és az utolsó négy számjegyének a szorzata is 2025. Határozd meg az A halmaz elemeinek számát!

Péter Róbert, Gyergyóremete

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A 2025 szorzattá bontható az $1, 3, 5$ és 9 számjegyekkel ($2025 = 3^4 \cdot 5^2$). Megvizsgáljuk, hogy hányféleképpen tudjuk kialakítani a 2025-ös szorzatot öt, illetve négy számjegy felhasználásával. **(1 pont)**

A következő számjegyek segítségével alakíthatjuk ki a 2025 szorzatot:

- 1. csoportosítás: 1, 5, 5, 9, 9,
- 2. csoportosítás: 3, 3, 5, 5, 9,
- 3. csoportosítás: 5, 5, 9, 9. **(2 pont)**

A számban szereplő ötödik számjegy szerepel az első öt és utolsó négy számjegy között, ezért csak az 5-ös vagy a 9-es lehet az ötödik számjegy. **(1 pont)**
Az alábbi eseteket tárgyalhatjuk:

1. eset: Az 1. csoportosítást társítjuk a 3. csoportosítással. Akár az 5-ös, akár a 9-es az ötödik számjegy, az első négy számjegyet $4 \cdot 3 = 12$-féleképpen lehet elrendezni. Az utolsó három számjegyet 3-féleképpen lehet elrendezni. Összesen $2 \cdot 3 \cdot 12 = 72$ ilyen nyolcjegyű szám van. **(2 pont)**

2. eset: A 2. csoportosítást társítjuk a 3. csoportosítással. Ha az 5-ös az ötödik számjegy, akkor az első négy számjegyet $4 \cdot 3 = 12$-féleképpen lehet elrendezni. Ha a 9-es az ötödik számjegy, akkor az első négy számjegyet $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$-féleképpen lehet elrendezni. Az utolsó három számjegyet 3-féleképpen lehet elrendezni. Összesen $(12 + 6) \cdot 3 = 54$ ilyen nyolcjegyű szám van. **(2 pont)**

A két esetet összesítve $72 + 54 = 126$ nyolcjegyű számot kapunk, tehát az A halmaz elemeinek száma 126. **(1 pont)**
■

2. feladat (10 pont). Az $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ függvényt a következőképpen értelmezzük: $f(a)$ az a legkisebb négyzetszám, amelyre teljesül, hogy $a \mid f(a)$ (például $f(3) = 9, f(8) = 16$).

a) Határozd meg az összes olyan n számot, amelyre $f(n) = 2025$.

b) Hány megoldása van az $f(n) - n = 2025$ egyenletnek?

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A 2025 prímfelbontása: $3^4 \cdot 5^2$. Az f függvény az a prímfelbontásában minden páratlan kitevőhöz hozzáad egyet, a páros kitevőket pedig változatlanul hagyja. Az így kapott szám valóban négyzetszám, osztható a-val és a legkisebb ilyen tulajdonságú. **(1 pont)**
Tehát a és $f(a)$ prímtényezői megegyeznek. Ha $f(n) = 2025$, akkor az n prímtényezői 3 és 5. **(1 pont)**
Az n prímfelbontásában a 3 a harmadik vagy a negyedik, míg az 5 az első vagy a második kitevőn szerepelhet, ez pontosan 4 lehetőség. Tehát a keresett számok:

$$3^3 \cdot 5^1 = 135, \quad 3^4 \cdot 5^1 = 405, \quad 3^3 \cdot 5^2 = 675, \quad 3^4 \cdot 5^2 = 2025. \quad \textbf{(2 pont)}$$

b) Igazoljuk, hogy $f(n) - n$ akkor és csakis akkor négyzetszám, ha n négyzetszám.

Ha n négyzetszám, akkor $f(n) = n$, tehát $f(n) - n = 0$, ami valóban egy teljes négyzet. **(1 pont)**
Ha n nem négyzetszám, akkor n-nek van olyan prímosztója, amely páratlan kitevőn szerepel a felbontásában, legyen ez p^{2k+1}. Ekkor mivel $n \mid f(n)$, ezért $p^{2k+1} \mid f(n)$, továbbá $f(n)$ négyzetszám, tehát p páros kitevőn szerepel a felbontásában, így $p^{2k+2} \mid f(n)$. **(2 pont)**

Ezeket összegezve azt kapjuk, hogy az $f(n) - n$ osztható p^{2k+1}-nel, de nem osztható p^{2k+2}-nel, ezért a prímfelbontásában a p páratlan kitevőn szerepel, vagyis nem lehet négyzetszám.

Tehát az $f(n) - n = 0$ vagy $f(n) - n$ nem négyzetszám, ezért nincs olyan pozitív egész n szám, amelyre $f(n) - n = 2025$. **(2 pont)**

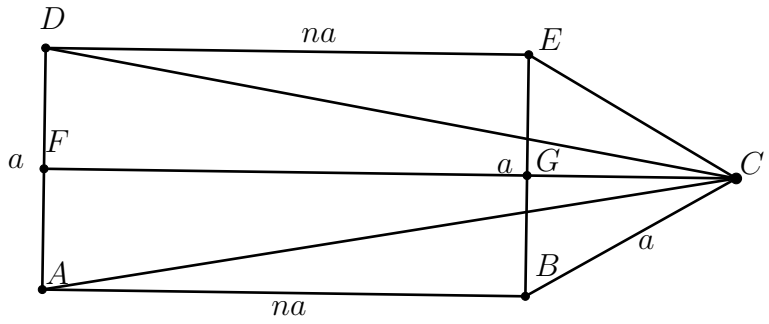
A b) alpont második megoldása. Ha a p prímszám osztja a-t, akkor p osztja az $f(a)$-t is, minden $a \in \mathbb{N}^*$ esetén. **(1 pont)**
Így ha $p \mid n$, akkor $p \mid f(n) - n = 2025$, tehát p páratlan. **(1 pont)**
Azt kaptuk, hogy a n és $f(n)$ minden prímtényezői páratlanok, tehát n és $f(n)$ páratlanok, **(2 pont)**
ami ellentmond az $f(n) - n = 2025$ feltételnek, ezért nincs megoldása az egyenletnek. **(1 pont)**
■

■

3. feladat (10 pont). Az $ABCD$ konvex négyszögben $\widehat{DAB} = 90°$, $\widehat{ABC} = 150°$, $AD = BC = a$, $AB = n \cdot a$, ahol $n \in (0, \infty)$ változó. Számítsd ki a $\dfrac{CD}{BD}$ arány legnagyobb értékét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



A feladat megoldását nem befolyásolja, ha a rajzot az n egy sajátos értékére készítjük el (jelen esetben $n = 2$).
Megrajzoljuk az $ABED$ téglalapot. Ekkor $AD = BE = a$ és tudjuk, hogy $BC = a$, így $BE = BC$. Tehát a BCE háromszög egyenlő szárú, amelyben

$$\widehat{EBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ,$$

tehát BCE egyenlő oldalú háromszög ($BE = EC = BC = a$).
A segédszerkesztés alapján $DE = AB = n \cdot a$, $EC = BC = a$,

$$\widehat{DEC} = \widehat{DEB} + \widehat{BEC} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ = \widehat{ABC},$$

ezért $DEC_\triangle \equiv ABC_\triangle$. Innen kapjuk, hogy $CD = CA$, így a CDA háromszög egyenlő szárú, amelyben a CF magasság ($F \in AD$) egyben oldalfelező is, tehát

$$AF = FD = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}.$$

Ha FC a BE egyenest G pontban metszi, akkor GC a BCE egyenlő oldalú háromszög magassága ($FC \perp AD$, $AD \parallel BE$, ahonnan $FC \perp BE$), s mivel $BC = a$, $BG = \frac{a}{2}$, ezért

$$GC = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

így

$$FC = FG + GC = AB + GC = an + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\left(2n + \sqrt{3}\right)}{2}.$$

Az FCD derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján

$$CD^2 = FD^2 + FC^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\left(2n + \sqrt{3}\right)}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \left(1 + 4n^2 + 4n\sqrt{3} + 3\right) = a^2 \cdot \left(n^2 + n\sqrt{3} + 1\right).$$

(4 pont)

Az ABD derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = (an)^2 + a^2 = a^2 \cdot \left(n^2 + 1\right), \qquad \textbf{(1 pont)}$$

így

$$\frac{CD^2}{BD^2} = \frac{a^2 \cdot \left(n^2 + n\sqrt{3} + 1\right)}{a^2 \cdot (n^2+1)} = 1 + \frac{n\sqrt{3}}{n^2+1}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az $(n-1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből következik $n^2 + 1 \geq 2n$ (egyenlőség $n = 1$ esetén), így $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{2n}$ és

$$\frac{n\sqrt{3}}{n^2+1} \leq \frac{n\sqrt{3}}{2n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és} \quad 1 + \frac{n\sqrt{3}}{n^2+1} \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Ezek alapján $\frac{CD^2}{BD^2} \leq \frac{2+\sqrt{3}}{2}$, ahonnan $\frac{CD}{BD} \leq \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$, az egyenlőség $n = 1$ esetén áll fenn. **(2 pont)**

Megjegyzés. A CD szakasz hossza többféleképpen is kiszámolható. Minden esetben a helyes kiszámolás 4 pontot ér.

Megjegyzés. A $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ kifejezés az összetett gyökképlettel egyszerűbb alakra hozható, ugyanis

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

ezért írhatjuk, hogy $\frac{CD}{BD} \leq \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, bármely $n \in (0, \infty)$ esetén.

Tehát a $\frac{CD}{BD}$ arány legnagyobb értéke $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, amelyet az $n = 1$ esetén kapunk.

Megjegyzés. Az $f(n) = \frac{n\sqrt{3}}{n^2+1}$, $n > 0$ kifejezés maximumát úgy is megkaphatjuk, hogy azt vizsgáljuk, hogy az $f(n) = y$ egyenletnek mely y értékek esetén van megoldása.

$$f(n) = y \iff \frac{n\sqrt{3}}{n^2+1} = y \iff yn^2 - n\sqrt{3} + y = 0.$$

Ha $y = 0$, akkor $n = 0$. Ha $y \neq 0$, akkor

$$\Delta = 3 - 4y^2 \geq 0 \iff y \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \cap (0, +\infty) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

Tehát az $f(n)$ maximuma $\frac{\sqrt{3}}{2}$, amit az $n = 1$ esetén vesz fel. Tehát a $\frac{CD}{BD}$ maximális értéke:

$$\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2^2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

■

4. feladat (10 pont). Adott 15 darab nemnulla, egymástól különböző, 987-nél kisebb természetes szám. Bizonyítsd be, hogy ezek között létezik három olyan szám, amelyek egy háromszög oldalhosszai lehetnek!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Tegyük fel, hogy a 15 természetes szám között nem létezik három olyan, amely egy háromszög oldala lehetne. Legyenek a megadott számok $a_1 < a_2 < \cdots < a_{15}$ növekvő sorrendben. **(1 pont)**
A háromszög-egyenlőtlenség alapján három szám ($a < b < c$) akkor lehet egy háromszög oldalainak hossza, ha $a + b > c$.
Ha nem létezik olyan háromszög, amely oldalhosszai a kiválasztott számok között vannak, akkor minden $i \geq 3$ esetén fenn kell állnia az $a_i \geq a_{i-1} + a_{i-2}$ összefüggésnek. **(3 pont)**
Mivel a számok pozitív természetes számok, a legkisebb lehetséges értékeik a következők:

$$\begin{aligned}
a_1 &\geq 1,\\
a_2 &\geq 2,\\
a_3 &\geq a_1 + a_2 \geq 1 + 2 = 3,\\
a_4 &\geq a_2 + a_3 \geq 2 + 3 = 5,\\
a_5 &\geq a_3 + a_4 \geq 3 + 5 = 8,\\
a_6 &\geq a_4 + a_5 \geq 5 + 8 = 13,\\
a_7 &\geq a_5 + a_6 \geq 8 + 13 = 21,\\
a_8 &\geq a_6 + a_7 \geq 13 + 21 = 34,\\
a_9 &\geq a_7 + a_8 \geq 21 + 34 = 55,\\
a_{10} &\geq a_8 + a_9 \geq 34 + 55 = 89,\\
a_{11} &\geq a_9 + a_{10} \geq 55 + 89 = 144,\\
a_{12} &\geq a_{10} + a_{11} \geq 89 + 144 = 233,\\
a_{13} &\geq a_{11} + a_{12} \geq 144 + 233 = 377,\\
a_{14} &\geq a_{12} + a_{13} \geq 233 + 377 = 610,\\
a_{15} &\geq a_{13} + a_{14} \geq 377 + 610 = 987.
\end{aligned}$$

(4 pont)

Tehát $a_{15} \geq 987$, ami ellentmond annak, hogy minden szám kisebb 987-nél.
Tehát a kezdeti feltételezésünk hamis volt, vagyis a 15 szám között valóban léteznie kell három olyannak, amelyek egy háromszög oldalhosszai. **(1 pont)**
■

5. feladat (10 pont). A $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmaz egy A részhalmazára teljesül, hogy az A bármely három a, b, c eleme esetén az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincs egész gyöke. Legtöbb hány eleme lehet az A halmaznak?

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Belátjuk, hogy az A halmaznak legtöbb 5 eleme lehet, és erre megfelelő példa az $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. **(1 pont)**
Előbb igazoljuk, hogy az A részhalmaz megfelel a feltételeknek. Belátjuk, hogy ha a, b, c mind páratlanok, akkor az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincs egész gyöke. Két esetünk van: **(1 pont)**

1. Ha n páratlan egész, akkor an^2, bn, c három páratlan szám, így az összegük páratlan, tehát nem lehet 0. **(1 pont)**

2. Ha n páros egész, akkor az an^2, bn páros, míg a c páratlan, így az összegük páratlan, tehát nem lehet 0. **(1 pont)**

Tehát mindkét esetben nincs egyetlen olyan n egész szám sem, amire $an^2 + bn + c = 0$. Tehát az A halmaz tartalmazhatja a B összes páratlan elemét, így az $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ valóban egy megfelelő halmaz. **(1 pont)**
Indirekt módon tegyük fel, hogy A-nak lehet legalább 6 eleme is. Vegyük észre, hogy ha $a, b, c \in A$ elemekre teljesül, hogy $a+c = b$, akkor a -1 egész gyök lesz, hiszen $a(-1)^2+b(-1)+c = a-b+c = 0$. Ebből adódik, hogy az A-ban nem lehet olyan számhármas, amely teljesíti ezt a feltételt. **(2 pont)**
Két esetetet különböztetünk meg.

1. Ha $1 \in A$, akkor $(2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 9)$ számpároknak legfennebb az egyik eleme lehetne benne az A halmazban, ez legtöbb 5 elem, ami ellentmond annak, hogy minimum 6 eleme van az A halmaznak. **(1 pont)**

2. Ha $1 \notin A$, akkor a $(2, 4, 6)$ és $(3, 5, 8)$ szárhármasok elemei közül legtöbb két-két elem lehet eleme az A halmaznak, így ahhoz, hogy legalább 6 eleme legyen A-nak, a 7 és a 9 biztosan eleme kell legyen az A halmaznak, a számhármasokból pedig két-két elem. Mivel $2 + 7 = 9$ ezért $2 \notin A$, ahonnan $4, 6 \in A$. A $3 + 4 = 7$ és $5 + 4 = 9$ egyenlőségek miatt $3, 5 \notin A$ és így az A halmaznak ismét legtöbb 5 eleme van, ami ellentmondás. **(1 pont)**

■

6. feladat (10 pont). Az $ABCD$ konvex négyszögben $\widehat{ABD} = 2\widehat{ACD}$ és a BD egyenes az ABC háromszög köré írt kört az E pontban metszi.

a) Igazold, hogy a D pont az ABC háromszög köré írt kör belsejében található!

b) Igazold, hogy $AB = DB$ akkor és csakis akkor, ha AD az $\widehat{EAC}$ szögfelezője!

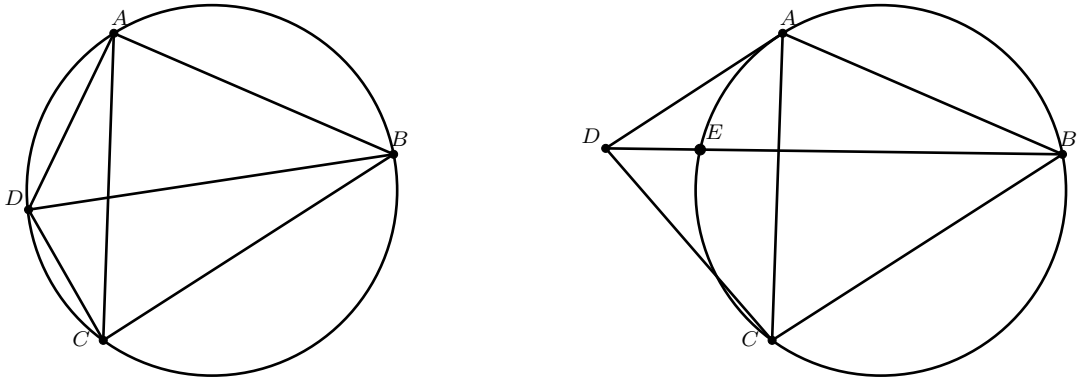
Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Ha a D rajta van az ABC háromszög köré írt körön, akkor

$$\widehat{ABD} = \frac{m(\overset{\frown}{AD})}{2} = \widehat{ACD} \neq 2 \cdot \widehat{ACD}.$$

Tehát D nem lehet a körön. **(1 pont)**

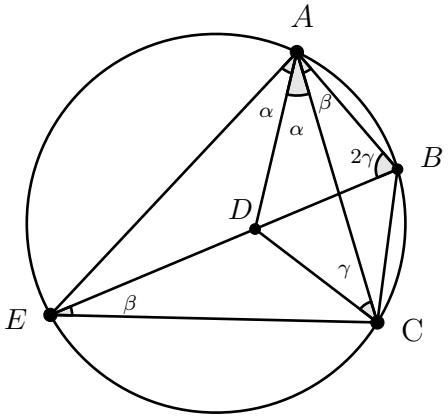


Ha D az ABC háromszög köré írt kör külső tartományában található, akkor ACD szög szárai közé eső körívnek belső pontja lesz az E pont, innen azt kapjuk, hogy

$$\widehat{ACD} > \frac{m(\widehat{AE})}{2} = \widehat{ABE} = \widehat{ABD} = 2 \cdot \widehat{ACD},$$

tehát $\widehat{ACD} > 2 \cdot \widehat{ACD}$, ami ellentmondás.
Tehát a D pont csakis az ABC háromszög köré írt kör belső tartományában található. (**1 pont**)

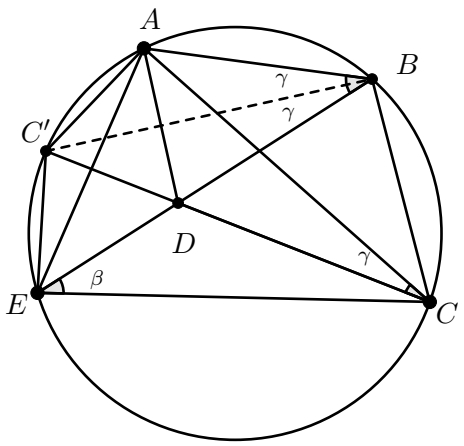
b) Igazoljuk, hogy ha AD az $\widehat{EAC}$ szögfelezője, akkor $AB = DB$.



Ha AD az $\widehat{EAC}$ szögfelezője, akkor legyen $\widehat{CAD} = \widehat{DAE} = \alpha$ és $\widehat{DCA} = \gamma$.
Mivel $\widehat{ECA} = \widehat{EBA}$, következik, hogy $\widehat{ECD} = \gamma$, tehát DC a $\widehat{ECA}$ szögfelezője. Így D az AEC háromszögbe írt kör középpontja. A $\widehat{DEC} = \beta$ esetén $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} + \widehat{CAB} = \alpha + \beta$. (**1 pont**)
Az AEB háromszög szögeinek összege $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, ezért a belső szögek összege alapján

$$\begin{aligned}\widehat{ADB} &= 180° - \widehat{DAB} - \widehat{ABD} \\ &= 180° - (\alpha + \beta) - 2\gamma \\ &= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - \alpha - \beta - 2\gamma \\ &= \alpha + \beta.\end{aligned}$$

Ezek szerint $\widehat{ADB} = \widehat{DAB}$, tehát az ADB háromszög egyenlő szárú, vagyis $AB = DB$. (**2 pont**)



Igazoljuk, hogy, ha $AB = DB$, akkor AD az $\widehat{EAC}$ szögfelezője.
Legyen C' az ABC háromszög köré írt körének a DC egyenessel való metszéspontja. Mivel $\widehat{DCA} = \gamma$ és $\widehat{DBA} = 2\gamma$, következik, hogy C' az AE körív felezőpontja, tehát BC' az $\widehat{ABD}$ szögfelezője. (**1 pont**)
Mivel az ABD háromszög egyenlő szárú, következik, hogy $AD \perp BC'$, tehát $ABDC'$ négyszög deltoid. Innen $C'A = C'D = C'E$, azaz CC' az $\widehat{ACE}$ szögfelezője. (**1 pont**)
Az $ABDC'$ deltoid tulajdonsága miatt $\widehat{AC'B} = \widehat{BC'C}$, amiből következik, hogy $AB = BC$, vagyis EB az $\widehat{AEC}$ szögfelezője. (**1 pont**)
Így a D pont az AEC háromszög szögfelezőinek metszéspontja, amiből következik, hogy AD az $\widehat{EAC}$ szögfelezője. (**1 pont**)

■

Hivatalból összesen: 6 pont.

További pontszám összesen: 54 pont.