MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 24.

X. osztály – I. forduló

1. feladat. Határozd meg az x valós számokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

$$2026^{x-\frac{\pi}{4}} + 2026^{\frac{\pi}{4}-x} = \sqrt{2} \cdot (\sin x + \cos x)\,.$$

2. feladat. Tekintsük az $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,

$$f(z) = \varepsilon^{2026}\, z + \varepsilon^{2027}\, \overline{z}$$

függvényt, ahol ε harmadrendű egységgyök és $\varepsilon \neq 1$.

a) Igazold, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$f(z) = 2 \cdot \mathrm{Re}(\varepsilon z) \quad \text{és} \quad f(z) + f(\overline{z}) = -2 \cdot \mathrm{Re}(z),$$

ahol $\mathrm{Re}(z)$ a z komplex szám valós részét jelöli!

b) Igazold, hogy az f függvény szürjektív, de nem injektív!

3. feladat. Igazold, hogy

$$\sqrt[3]{1-\log_{abc} a}+\sqrt[3]{1-\log_{abc} b}+\sqrt[3]{1-\log_{abc} c} \;\geq\; \sqrt[3]{2-2\log_{abc} ab}+\sqrt[3]{2-2\log_{abc} bc}+\sqrt[3]{2-2\log_{abc} ca},$$

bármely $a, b, c \in (1, +\infty)$ esetén!

4. feladat. a) Legyen O a komplex számsík kezdőpontja (origója), B és C a sík két olyan pontja, amelyre az OBC háromszög pozitív körbejárású. Igazold, hogy az OBC háromszög H magasságpontjának affixuma

$$h = i \cdot (b - c) \cdot \mathrm{ctg}(\alpha),$$

ahol b és c a B, illetve a C pont affixuma, és α a BOC szög mértéke!

b) Az $ABCD$ konvex négyszög átlói nem merőlegesek egymásra és az O pontban metszik egymást. Legyen S_1 az OAB és S_2 az OCD háromszög súlypontja, illetve H_1 az OBC, H_2 pedig az OAD háromszög magasságpontja. Igazold, hogy

$$S_1S_2 \perp H_1H_2.$$

Megjegyzés: Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, hivatalból minden feladatra 1 pont jár.
Munkaidő: 3 óra.