MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 25.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). Határozd meg az összes olyan (x, y) egész számokból álló számpárt, amelyre

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+12=y^2.$$

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat az egyenleten:

$$\begin{aligned}
x(x+1)(x+2)(x+3)+12&=y^2,\\
(x^2+3x)(x^2+3x+2)+12&=y^2,\\
(x^2+3x+1)^2-1+12&=y^2,\\
(x^2+3x+1)^2+11&=y^2,\\
y^2-(x^2+3x+1)^2&=11,\\
((y-x^2-3x-1))(y+x^2+3x+1)&=11.
\end{aligned}$$

(3 pont)

Vezessük be a $z=x^2+3x+1$ jelölést, ekkor a fenti egyenlet átalakul az

$$(y-z)(y+z)=11$$

alakra. **(2 pont)**
Mivel 11 prímszám, az utóbbi összefüggés pontosan akkor teljesül, ha

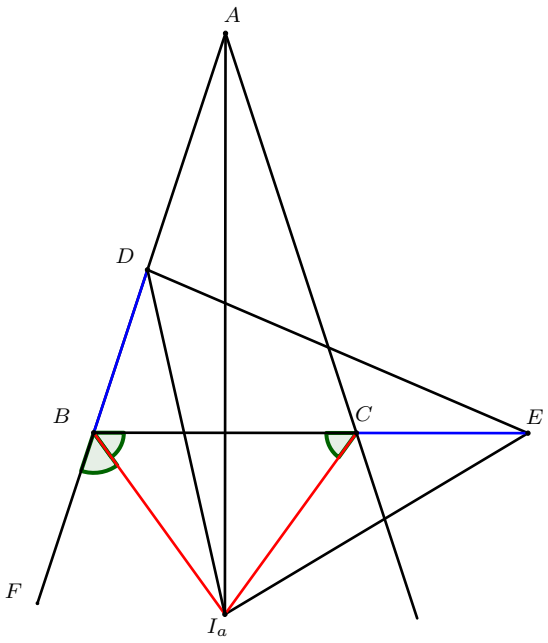
$$(y-z, y+z)\in\{(1,11),(-1,-11),(11,1),(-11,-1)\}.$$ **(1 pont)**

Felhasználva, hogy $z=\frac{(y+z)-(y-z)}{2}$ és $y=\frac{(y+z)+(y-z)}{2}$, a szimmetria miatt következik, hogy pontosan azok a (z,y) számpárok a megoldások, amelyekre $z\in\{5,-5\}$ és $y\in\{6,-6\}$. **(1 pont)**
Mivel $z=x^2+3x+1$, a $z=5$ esetben az $x^2+3x-4=0$ egyenletet kell megoldanunk, amelynek gyökei $x=-4$ és $x=1$. A $z=-5$ esetben az $x^2+3x+6=0$ egyenletet kell megoldanunk, amelynek nincs valós gyöke. Ezért a keresett megoldások $(-4,6),(-4,-6),(1,6),(1,-6)$. **(2 pont)**
■

2. feladat (10 pont). Az ABC háromszögben $AB=AC$. Legyen $D\in(AB)$ és $E\in(BC$ olyan pont, amelyre $C\in(BE)$ és $BD=CE$. Jelölje I_a az ABC háromszög BC oldalához írt körének középpontját. Igazold, hogy a BDE háromszög köré írt kör átmegy az I_a ponton!

Rákóczi Erik, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Tekintsük a mellékelt ábrát.



Igazolni kell, hogy a $BDEI_a$ négyszög húrnégyszög. Mivel $AB = AC$ és az AI_a egyenes szögfelező, ezért

$$BI_a = CI_a \qquad \text{és} \qquad \widehat{FBI_a} = \widehat{I_aBC} = \widehat{BCI_a}. \qquad \textbf{(4 pont)}$$

Innen

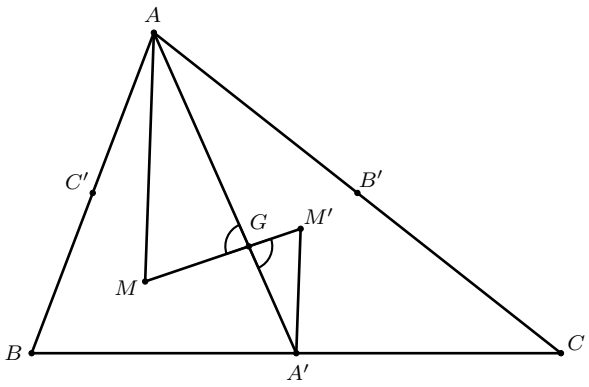
$$\widehat{I_aBD} = \widehat{I_aCE} = 180^\circ - \widehat{FBI_a}.$$

Ugyanakkor $BD = CE$, tehát a $DBI_{a\triangle} \equiv ECI_{a\triangle}$, **(3 pont)**
amiből következik, hogy $\widehat{BDI_a} = \widehat{CEI_a}$. Ezért a $BDEI_a$ négyszög húrnégyszög, azaz I_a rajta van a BDE háromszög köréírt körén. **(2 pont)**
■

3. feladat (10 pont). Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalának felezőpontjai C', A', B' és legyen M egy pont a síkban. Ha a az A' ponton át az AM egyenessel párhuzamosan húzott egyenes, b a B' ponton át a BM egyenessel párhuzamosan húzott egyenes és c a C' ponton át a CM egyenessel párhuzamosan húzott egyenes, akkor igazold, hogy az a, b, c egyenesek egy pontban futnak össze!

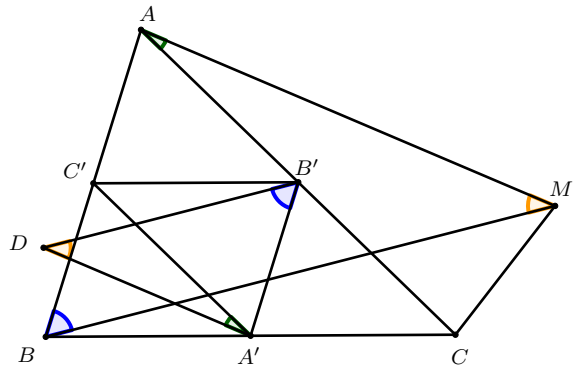
Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Tekintsük az ábrát! Legyen G az ABC háromszög súlypontja. Ha $M = G$, akkor az a, b, c egyenesek a háromszög oldalfelezői, így a G súlypontban futnak össze. Tegyük fel, hogy $M \neq G$. Legyen M' az MG egyenes azon pontja, amelyre G az M és M' pontok között van és $MG = 2M'G$. **(4 pont)**
Ekkor $AGM_\triangle \sim A'GM'_\triangle$, mert $\widehat{AGM} \equiv \widehat{A'GM'}$ (csúcsszögek), $\frac{MG}{GM'} = \frac{AG}{GA'} = 2$. **(2 pont)**
Így $\widehat{MAG} \equiv \widehat{GA'M'}$, ahonnan $AM \parallel A'M'$, tehát $A'M' = a$. Hasonlóan belátható, hogy $M'B' = b$ és $M'C' = c$. Tehát M' az a, b, c egyenesek összefutási pontja. **(3 pont)**
■

Második megoldás.



Tekintsük az ábrát! Legyen az a és b egyenes metszéspontja D. Igazolni fogjuk, hogy $D \in c$, azaz $C'D \parallel CM$. A feladat feltételei alapján $A'D \parallel AM$, $B'D \parallel BM$ és $A'B' \parallel AB$, mert $A'B'$ középvonal az ABC háromszögben. Innen következik, hogy $A'B'D_\triangle \sim ABM_\triangle$, amiből

$$\frac{A'D}{AM} = \frac{B'D}{BM} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}.$$

(5 pont)
Mivel $A'D \parallel AM$ és $A'C' \parallel AC$, mert $A'C'$ középvonal, következik, hogy $\widehat{DA'C'} = \widehat{CAM}$, mert párhuzamos szárú szögek. Az $A'DC'_\triangle$ és $AMC_\triangle$ háromszögekben

$$\widehat{DA'C'} = \widehat{CAM} \quad \text{és} \quad \frac{A'D}{AM} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{1}{2},$$

ezért $A'DC'_{\triangle} \sim AMC_{\triangle}$. **(3 pont)**
Innen a megfelelő oldalak párhuzamossága miatt adódik, hogy

$$C'D \parallel CM,$$

vagyis $D \in c$. Tehát az a, b, c egyenesek egy pontban metszik egymást. **(1 pont)**
■

4. feladat (10 pont). Bizonyítsd be, hogy $c = 1$ a legnagyobb olyan valós konstans, amelyre

$$\frac{x}{xa+yb} + \frac{y}{ya+xb} \geq \frac{c}{a+b},$$

minden $a, b, x, y > 0$ esetén! *Lukács Andor, Kolozsvár*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Előbb belátjuk, hogy $c \geq 1$. Ehhez elég igazolni, hogy teljesül az egyenlőtlenség, ha c helyett 1-et írunk. Beszorozva az egyenlőtlenséget a nevezők szorzatával, majd elvégezve a műveleteket, rendre a következő ekvivalens egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\begin{gathered} x(ya+xb)(a+b) + y(xa+yb)(a+b) \geq (xa+yb)(ya+xb), \\ x^2ab + a^2xy + b^2x^2 + b^2xy + 2abxy + 2a^2xy \geq abx^2 + a^2xy + b^2xy + aby^2, \\ a^2xy + b^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \geq b^2xy, \\ a^2xy + b^2(x^2 - xy + y^2) + 2abxy \geq 0, \end{gathered}$$

ami igaz minden $a, b, x, y > 0$ esetén. Ezért $c \geq 1$. **(5 pont)**

Igazoljuk, hogy $c \leq 1$. Ehhez előbb alakítsuk át az egyenlőtlenséget az

$$\left(\frac{1}{a+\frac{y}{x}b} + \frac{1}{a+\frac{x}{y}b}\right)(a+b) \geq c$$

ekvivalens alakra, és vezessük be az $\frac{y}{x} = \lambda > 0$ jelölést, tehát az egyenlőtlenség ekvivalens az

$$\left(\frac{1}{a+\lambda b} + \frac{1}{a+\frac{1}{\lambda}b}\right)(a+b) \geq c$$

egyenlőtlenséggel. A célunk az, hogy belássuk: választhatunk olyan, az $n \in \mathbb{N}^*$ paraméterű sorozatokat az a, b, λ változók helyére, amelyek esetén ha $n \to \infty$, akkor a bal oldal határértéke 1 lesz. Válasszuk a λ helyére az $(n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$, a b helyére pedig az $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pozitív tagú sorozatot. Az egyenlőtlenség alapján minden $a > 0$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\left(\frac{1}{a+n^2\cdot\frac{1}{n}} + \frac{1}{a+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}}\right)\left(a+\frac{1}{n}\right) \geq c, \quad \textbf{(3 pont)}$$

ezért határértékre térve n szerint, minden $a > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a+\frac{1}{n^3}}\right)\left(a+\frac{1}{n}\right) \geq c,$$

vagyis $\left(0+\frac{1}{a}\right)\cdot a \geq c$, azaz $1 \geq c$. Összefoglalva, $1 \leq c \leq 1$, tehát $c = 1$. **(1 pont)**
■

Megjegyzés. Az

$$\frac{x}{xa+yb}+\frac{y}{ya+xb}\geq\frac{1}{a+b}.$$

egyenlőtlenség igazolható a Titu-lemma segítségével is. Valóban, írhatjuk, hogy

$$\frac{x}{xa+yb}+\frac{y}{ya+xb}=\frac{(\sqrt{x})^2}{xa+yb}+\frac{(\sqrt{y})^2}{ya+xb}\geq\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(a+b)(x+y)}>\frac{1}{a+b},$$

mert $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}>x+y$.

5. feladat (10 pont). Angelico felírt a táblára néhány 2026-nál nem nagyobb, legfeljebb 2026 db, nem feltétlenül különböző pozitív egész számot. Ezután mindegyik számot egyenként a 2026. hatványra emelte, majd a kapott számokat összeadta. Az így kapott eredmény $9^{1014}\cdot 11^{2028}$. Hány számot írhatott fel Angelico?

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A feladat feltételéből:

$$a_1^{2026}+a_2^{2026}+\cdots+a_s^{2026}=9^{1014}\cdot 11^{2028},$$

ahol mi az s-t szeretnénk meghatározni. Mivel a felírt számok mindegyike kisebb, mint 2027, és 2027 prímszám, ezért mind relatív prímek a 2027-tel. **(2 pont)**
Alkalmazva a kis Fermat-tételt, a_i^{2026} minden i-re 1-et ad maradékul 2027-tel osztva. **(2 pont)**
Mivel s legfeljebb 2026, ezért az összeg 2027-es maradéka pontosan annyi, ahány számot összeadunk, tehát s. **(2 pont)**
Vegyük észre, hogy

$$9^{1014}\cdot 11^{2028}=3^{2028}\cdot 11^{2028}=33^{2028}=33^{2026}\cdot 1089,$$

és mivel a kis Fermat-tételből 33^{2026} 2027-es maradéka 1, így az összegé 1089. Tehát $s=1089$ darab számot írt fel Angelico a táblára. **(2 pont)**

Ha 1089 darab 33-as van a táblán, akkor ténylegesen ezt az összeget kapjuk. **(1 pont)**
■

6. feladat (10 pont). Ali és Baba egy $1\times 4n$ mezőből álló, sakktáblaszerűen színezett táblán játszik ($n\geq 2$). A játékosok felváltva lépnek, Ali kezd. Egy lépésben a soron lévő játékos két tetszőleges mező színét felcseréli, azzal a megkötéssel, hogy egy adott mezőpár cseréjére a játék teljes ideje alatt legfeljebb egyszer kerülhet sor. A játék akkor ér véget, ha az összes lehetséges párt megcserélték. Ali célja, hogy a játék bármely fázisában megjelenjen a táblán egy minél hosszabb egyszínű szakasz, Baba pedig ezt próbálja megakadályozni. Mekkora az a leghosszabb egyszínű szakasz, amit Ali a játék kimenetelétől függetlenül, átmenetileg is képes előállítani?

Bodor Ádám, Csíkszereda
Ercse Ferenc, Sepsiszentgyörgy
Sajter Klaus, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Állítsuk párba a mezőket, úgy, hogy az i. és az $i+1$. mező van párban, ahol $1 \leq i < 4n$ páratlan szám. Az $2i+1$. és $2i+2$. mezőt tartalmazó párt nevezzük az i. párnak, $0 \leq i \leq 2n-1$. Ha Ali a k. és az m. párból cserél ki két mezőt, Baba cserélje ki ezen párok fennmaradó egy-egy mezőjét. **(2 pont)**

Ha Ali egy páron belül cserél, Baba egy másik páron belül cserél (ezt mindig megteheti, mert $\frac{4n}{2} = 2n$, avagy páros számú pár van). **(1 pont)**

Ilyen módon Baba lépése után (és az első lépés előtt) bármelyik párban pontosan egy fekete és pontosan egy fehér mező lesz. **(1 pont)**

Ekkor bármely 4 egymást követő mező közül legfeljebb 3 lehet azonos színű Baba bármely lépése után (mivel 4 egymásutáni mező tartalmaz legalább egy párt), így Ali 4 azonos színű mezőt elérhet a következő körében, de többet biztos, hogy nem. **(2 pont)**

Könnyen igazolható példával, hogy Ali 4-et mindig el tud érni Baba stratégiájától függetlenül (pl. egy 8 hosszú sorozaton belül), így a leghosszabb egyszínű szakasz, amit Ali elő tud állítani 4 hosszú. **(3 pont)**

■

Hivatalból összesen: 6 pont.

További pontszám összesen: 54 pont.