MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 24.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Az $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú számsorozat esetén $x_1 = \frac{2}{3}$ és

$$(n+1)^2 \cdot x_{n+1} = n^2 \cdot x_n + \frac{1}{3}, \quad \forall n \geq 1.$$

a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ határértéket!

Tóth Viktória, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az általános tag meghatározásához számítsuk ki a sorozat első néhány tagját:

$$x_1 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 1^2}$$
$$x_2 = \frac{1}{4} = \frac{3}{3 \cdot 2^2}$$
$$x_3 = \frac{4}{27} = \frac{4}{3 \cdot 3^2}$$
$$x_4 = \frac{5}{48} = \frac{5}{3 \cdot 4^2}.$$ **(1 pont)**

Ezek alapján a sejtésünk a következő:

$$x_n = \frac{n+1}{3n^2}, \quad \forall n \geq 1.$$ **(1 pont)**

Ezt matematikai indukcióval igazoljuk. Ha $n = 1$, akkor

$$x_1 = \frac{2}{3} = \frac{1+1}{3 \cdot 1^2},$$

tehát igaz. Tegyük fel, hogy $k \geq 1$ esetén teljesül az

$$x_k = \frac{k+1}{3k^2}$$

összefüggés és igazoljuk az indukciós állítást $(k+1)$-re. A rekurzió alapján

$$(k+1)^2 x_{k+1} = k^2 x_k + \frac{1}{3},$$ **(1 pont)**

ahonnan

$$x_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2}\left(k^2 \cdot \frac{k+1}{3k^2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{(k+1)^2}\left(\frac{k+1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{k+2}{3(k+1)^2}.$$

Tehát az állítás állítás igaz $(k+1)$-re, ezért

$$x_n = \frac{n+1}{3n^2}, \quad \forall n \geq 1. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

b) A keresett határértéket az alábbiak szerint alakítjuk:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sqrt[n]{x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{\frac{1}{n^n}}}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A D'Alambert-kritérium alapján

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{\frac{1}{n^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_nx_{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}} \cdot \frac{\frac{1}{n^n}}{x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3(n+1)^2} \cdot (n+1) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3(n+1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot e = \frac{e}{3}.$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sqrt[n]{x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \frac{e}{3}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az a) alpont második megoldása. a) Legyen $y_n = n^2x_n$, bármely $n \geq 1$ esetén. A rekurziós képlet alapján

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3}, \quad n \geq 1,$$

vagyis az $(y_n)_{n\geq 1}$ sorozat egy számtani haladvány, ahol $y_1 = \frac{2}{3}$ és $r = \frac{1}{3}$. Így az általános tag képlete

$$y_n = y_1 + (n-1) \cdot r = \frac{2}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n+1}{3}, \quad \forall n \geq 1.$$

Ezt felhasználva, az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagjának képlete

$$x_n = \frac{y_n}{n^2} = \frac{n+1}{3n^2}, \quad \forall n \geq 1. \qquad \textbf{(4 pont)}$$

■

■

2. feladat (10 pont). Az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix főátlón levő elemeinek összegét $\mathrm{Tr}A$-val jelöljük.

a) Igazold, hogy a $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(x) = \det(A - xI_2)$ függvényre $P(x) = x^2 - \mathrm{Tr}A \cdot x + \det A, \forall x \in \mathbb{C}$.

b) Bizonyítsd be, hogy $\det(A^2+A+I_2) \geq \frac{3}{4} + 3 \cdot \mathrm{Tr}A \cdot \det A$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tetszőleges mátrix. Ekkor

$$P(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$= x^2 - (a+d)\cdot x + ad - bc \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$= x^2 - \mathrm{Tr}A \cdot x + \det A. \quad \textbf{(1 pont)}$$

b) Legyen $P(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - ax + b$, ahol $a = \mathrm{Tr}A$ és $b = \det A$. **(1 pont)**
Mivel $A^2 + A + I_2 = (A - \varepsilon I_2)(A - \varepsilon^2 I_2)$, ahol $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon \neq 1$, **(1 pont)**
ezért

$$\det(A^2+A+I_2) = \det((A-\varepsilon I_2)(A-\varepsilon^2 I_2)) = \det(A-\varepsilon I_2)\cdot\det(A-\varepsilon^2 I_2) = P(\varepsilon)\cdot P(\varepsilon^2). \quad \textbf{(1 pont)}$$

Vagyis

$$\det(A^2+A+I_2) = (\varepsilon^2 - a\varepsilon + b)(\varepsilon - \varepsilon^2 a + b) = a^2 + ab + b^2 + a - b + 1 \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$= (a-b)^2 + (a-b) + 1 + 3ab = \left(a - b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} + 3ab \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$\geq \frac{3}{4} + 3ab = \frac{3}{4} + 3 \cdot (\mathrm{Tr}A) \cdot (\det A). \quad \textbf{(1 pont)}$$

■

3. feladat (10 pont). Az $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mátrixok teljesítik az $A + B = A \cdot B$ összefüggést.

a) Igazold, hogy $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Bizonyítsd be, hogy ha $\det(A+B) > 0$ és $\det[(AB)^2 - 5AB + 5I_n] > 0$, akkor $\det(A^5 + B^5) > 0$.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Ha $A + B = AB$, akkor $AB - A - B + I_n = I_n$, vagyis $(A - I_n)(B - I_n) = I_n$. **(1 pont)**
Ez alapján $(A - I_n)$ és $(B - I_n)$ egymás inverzei, **(1 pont)**
tehát $(B - I_n)(A - I_n) = I_n$. Innen következik, hogy $BA = A + B = AB$. **(1 pont)**

b) Az a) alpont alapján $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$. **(1 pont)**
Vezessük be a $C = AB$ jelölést. Ekkor $A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB = C^2 - 2C$. **(1 pont)**
Továbbá

$$A^4 + B^4 = (A^2 + B^2)^2 - 2(AB)^2 = (C^2 - 2C)^2 - 2C^2 = C^4 - 4C^3 + 2C^2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} A^5 + B^5 &= (A+B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4) && \textbf{(1 pont)} \\ &= C(C^4 - 4C^3 + 2C^2 - C^3 + 2C^2 + C^2) \\ &= C^3(C^2 - 5C + 5I_n). && \textbf{(1 pont)} \end{aligned}$$

Mivel $\det(A+B) = \det C > 0$ és $\det((AB)^2 - 5AB + 5I_n) > 0$, következik, hogy

$$\det(A^5 + B^5) = (\det C)^3 \cdot \det(C^2 - 5C + 5I_n) > 0. \quad \textbf{(1 pont)}$$

■

Megjegyzés. Mivel $\det(A+B) = \det(AB) = \det(A)\det(B) > 0$ így a B mátrix invertálható. Ekkor felírhatjuk, hogy

$$\det(A - xB) = (\det B)^n \det((AB^{-1} - xI_n)) = (\det B)^n P_{AB^{-1}}(x) =: q(x),$$

ahol $q(x)$ egy valós együtthatós n-ed fokú polinom. Legyen $\varepsilon \neq 1$ egy ötödrendű egységgyök, vagyis $x^5 + 1 = (x+1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^4)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \det(A^5 + B^5) &= \det(A+B)\det(A-\varepsilon B)\det(A-\varepsilon^2 B)\det(A-\varepsilon^3 B)\det(A-\varepsilon^4 B) \\ &= \det(A+B)q(\varepsilon)q(\varepsilon^2)q(\varepsilon^3)q(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Az ε, ε^2 komplex számok konjugáltjai rendre ε^4, ε^3. Tudva, hogy $q(x)$ valós együtthatós, mondhatjuk, hogy $q(\varepsilon)$, $q(\varepsilon^2)$ komplex számok konjugáltjai rendre $q(\varepsilon^4)$, $q(\varepsilon^3)$. Ekkor

$$\det(A^5 + B^5) = \det(A+B)|q(\varepsilon)q(\varepsilon^2)|^2 > 0.$$

4. feladat (10 pont). Az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat esetén $x_1 \in (0,1)$ és

$$x_{n+1} = x_n \cdot \cos(x_n), \quad \forall n \geq 1.$$

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_n$ határértéket!

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{\operatorname{tg} x_k}{x_k} \right)^2 \right)$ határértéket!

Loga Patrik, Zilah

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel $x_1 \in (0,1)$, így $\cos x_1 \in (0,1)$ és $x_2 = x_1 \cos x_1 \in (0,1)$. Indukcióval kapjuk, hogy $x_n \in (0,1)$, vagyis a sorozat korlátos. **(1 pont)**
Mivel $x_n \in (0,1)$ esetén $0 < \cos x_n < 1$, következik, hogy $x_{n+1} = x_n \cos x_n < x_n$. Tehát a sorozat szigorúan csökkenő és alulról korlátos, így konvergens. **(1 pont)**
Legyen a határértéke ℓ. A rekurzióban n-nel a végtelenbe tartva kapjuk az $\ell = \ell \cos \ell$ összefüggést, ahonnan $\ell(1 - \cos \ell) = 0$. Az egyetlen lehetséges ($\ell \in [0,1)$) határérték $\ell = 0$. **(1 pont)**

b) A $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot x_n^2$ határértéket a Cesàro–Stolz-tétel segítségével számoljuk ki, ahol a számláló sorozata $a_n = n$, a nevezőé $b_n = \frac{1}{x_n^2}$. Mivel $(b_n)_{n\geq 1}$ szigorúan monoton és a végtelenbe tart, a tétel alkalmazható, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_n^2 \cos^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A nevezőt a következőképpen alakítjuk át:

$$\frac{1}{x_n^2 \cos^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1 - \cos^2 x_n}{x_n^2 \cos^2 x_n} = \frac{\sin^2 x_n}{x_n^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x_n}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $x_n \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$, így a nevező határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_n} = 1^2 \cdot \frac{1}{1^2} = 1.$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} n x_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \frac{1}{1} = 1,$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} x_n = 1. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

c) Alakítsuk át az összeg általános tagját a rekurzió és a $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$ azonosság felhasználásával:

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x_k}{x_k}\right)^2 = \frac{1}{x_k^2}\left(\frac{1}{\cos^2 x_k} - 1\right) = \frac{1}{x_k^2 \cos^2 x_k} - \frac{1}{x_k^2} = \frac{1}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{x_k^2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát a keresett összeg teleszkopikus:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\operatorname{tg} x_k}{x_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{x_k^2}\right) = \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_1^2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel a b) pont alapján $n x_{n+1}^2 \to 1$ (mert $n x_n^2 \to 1$ és $x_n \to 0$), kapjuk, hogy a keresett határérték

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\operatorname{tg} x_k}{x_k}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n x_{n+1}^2} - \frac{1}{n x_1^2}\right) = \frac{1}{1} - 0 = 1. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Megjegyzés. A határérték a Cesàro–Stolz-tétel alapján kiszámolható az összeg kiszámolása nélkül is. Az is teljes értékű megoldásnak számít.

■

Hivatalból összesen: 4 pont.

További pontszám összesen: 36 pont.