MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 24.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú számsorozat esetén $x_1 = \frac{2}{3}$ és

$$(n+1)^2 \cdot x_{n+1} = n^2 \cdot x_n + \frac{1}{3}, \quad \forall n \geq 1.$$

a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ határértéket!

2. feladat. Az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix főátlón levő elemeinek összegét $\mathrm{Tr}A$-val jelöljük.

a) Igazold, hogy a $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(x) = \det(A - xI_2)$ függvényre $P(x) = x^2 - \mathrm{Tr}A \cdot x + \det A, \forall x \in \mathbb{C}$.

b) Bizonyítsd be, hogy $\det(A^2 + A + I_2) \geq \frac{3}{4} + 3 \cdot \mathrm{Tr}A \cdot \det A$.

3. feladat. Az $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mátrixok teljesítik az $A + B = A \cdot B$ összefüggést.

a) Igazold, hogy $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Bizonyítsd be, hogy ha $\det(A + B) > 0$ és $\det[(AB)^2 - 5AB + 5I_n] > 0$, akkor $\det(A^5 + B^5) > 0$.

4. feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat esetén $x_1 \in (0, 1)$ és

$$x_{n+1} = x_n \cdot \cos(x_n), \quad \forall n \geq 1.$$

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_n$ határértéket!

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{tg}\, x_k}{x_k} \right)^2 \right)$ határértéket!

Megjegyzés: Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, hivatalból minden feladatra 1 pont jár.
Munkaidő: 3 óra.