MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 24.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Számítsd ki az

$$\int \frac{\sin 2x}{a+\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$$

integrált, ahol a olyan valós szám, amelyre $|a|>1$. *dr. Bencze Mihály, Brassó*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Ha I-vel jelöljük az integrált, akkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin 2x}{a+\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin 2x}{a+(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\sin 2x}{a+1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin 2x}{2a+1+\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ahonnan a $\cos 2x = u$, $-2\sin 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$I = \int \frac{-\,\mathrm{d}u}{2a+1+u^2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Két esetet kell megvizsgálnunk.

1. Ha $a>1$, akkor $2a+1>0$ és

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\,\mathrm{d}u}{2a+1+u^2} = -\frac{1}{\sqrt{2a+1}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2a+1}}+C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2a+1}}\operatorname{arctg}\frac{\cos 2x}{\sqrt{2a+1}}+C, \quad \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

2. Ha $a<-1$, akkor $2a+1<-1$ és

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\,\mathrm{d}u}{2a+1+u^2} = \frac{1}{2\sqrt{-2a-1}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{-2a-1}}{u+\sqrt{-2a-1}}\right|+C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-2a-1}}\ln\left|\frac{\cos 2x-\sqrt{-2a-1}}{\cos 2x+\sqrt{-2a-1}}\right|+C, \quad \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

■

2. feladat (10 pont). Jelölje $[x]$ az x valós szám egészrészét, $\{x\}$ pedig a törtrészét. A valós számok halmazán a „$\circ$” műveletet az

$$x\circ y = [x]\cdot[y]+\big\{\{x\}+\{y\}\big\}, \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

szabállyal értelmezzük. (A második tagban a külső kapcsos zárójel az összeg törtrészét jelöli).

a) Határozd meg a valós számok azon legbővebb $M \subset \mathbb{R}$ részhalmazát, amelyre teljesül, hogy $[x] \neq 0$ minden $x \in M$ esetén, és az $(M, \circ)$ pár Abel-csoportot alkot!

b) Legyen $x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{n}$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Határozd meg, hány olyan $x \in M$ létezik, amelyre teljesül az $x^{(2026)} = e$ egyenlőség, ahol e a csoport semleges eleme!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A „$\circ$” művelet értelmezése alapján észrevehető, hogy az eredmény egész része és törtrésze szétválasztható. Mivel $\big\{\{x\} + \{y\}\big\} \in [0, 1)$, ezért az egész rész $[x \circ y] = [x][y]$, valamint a törtrész $\{x \circ y\} = \big\{\{x\} + \{y\}\big\}$.

Kommutativitás: Mivel a valós számok szorzása és összeadása kommutatív felírhatjuk, hogy

$$x \circ y = [x][y] + \big\{\{x\} + \{y\}\big\} = [y][x] + \big\{\{y\} + \{x\}\big\} = y \circ x.$$

Tehát a művelet kommutatív.

Asszociativitás: Legyenek $x, y, z \in \mathbb{R}$ és jelöljük $\alpha = \{x\}$, $\beta = \{y\}$, $\gamma = \{z\}$. Ekkor

$$(x \circ y) \circ z = [x \circ y]\,[z] + \big\{\{x \circ y\} + \{z\}\big\} = ([x][y])[z] + \Big\{\big\{\alpha + \beta\big\} + \gamma\Big\},$$

$$x \circ (y \circ z) = [x]\,[y \circ z] + \big\{\{x\} + \{y \circ z\}\big\} = [x]([y][z]) + \Big\{\alpha + \big\{\beta + \gamma\big\}\Big\}.$$

Az egész részek mindkét esetben $[x][y][z]$. A törtrészek egyenlősége abból következik, hogy tetszőleges u, v valós számok esetén $\big\{\{u\} + v\big\} = \{u + v\} = \big\{u + \{v\}\big\}$. Tehát

$$\Big\{\big\{\alpha + \beta\big\} + \gamma\Big\} = \{\alpha + \beta + \gamma\} = \Big\{\alpha + \big\{\beta + \gamma\big\}\Big\}.$$

Tehát $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, azaz a művelet asszociatív. **(1 pont)**

Semleges elem: Az $e = 1$ a semleges eleme a „$\circ$” műveletnek. Valóban,

$$x \circ e = x \circ 1 = [x] \cdot [1] + \big\{\{x\} + \{1\}\big\} = [x] + \{x\} = x,$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. **(1 pont)**

Invertálható elemek: Meghatározzuk az invertálható elemeket a „$\circ$” műveletre nézve. Ehhez legyen $x, x' \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \circ x' = 1$. Ekkor

$$[x][x'] + \big\{\{x\} + \{x'\}\big\} = 1.$$

Az egész rész $[x] \cdot [x'] = 1$ és a törtrész $\big\{\{x\} + \{x'\}\big\} = 0$. Mivel $[x]$,$[x']$ egész számok, a szorzatuk 1 pontosan akkor, ha $[x] = [x'] \in \{-1, 1\}$. Így, hogy létezzen inverz eleme x-nek szükséges, hogy $[x] \in \{-1, 1\}$.

A törtrész pontosan akkor nulla, ha $\{x\}+\{x'\}\in\mathbb{Z}$. Figyelembe véve, hogy $0\leq\{x\}+\{x'\}<2$, ezért $\{x\}+\{x'\}\in\{0,1\}$. Ha $\{x\}=0$, vagyis x egy egész szám, akkor $x=\pm1$, és ekkor $x'=x$. Ha $\{x\}>0$, akkor $\{x'\}=1-\{x\}$. Tehát $x\in\mathbb{R}$ számnak van inverze a „$\circ$” műveletre nézve, pontosan akkor ha $[x]\in\{-1,1\}$, és az inverz $x'=x$, ha x egész szám, különben $x'=[x]+1-\{x\}$. (**2 pont**)

A legbővebb Abel-csoport megadása: Az eddigiek alapján az invertálható elemek halmaza $[-1,0)\cup[1,2)$, így az M Abel-csoport ennek részhalmaza kell legyen. De ez a halmaz egy Abel-csoport a „$\circ$” műveletre nézve. Valóban, a művelet zárt, hiszen az $[x],[y]=1$ feltételből $[x\circ y]=[x][y]=1$. A zártság elég is, mert a többi csoport axiómát már leellenőriztük. Tehát $M=[-1,0)\cup[1,2)$. (**1 pont**)

b) Az $x^{(2026)}=e$ egyenlet megoldásához először levezetjük az $x^{(n)}$ alakját. Kiszámítva az első néhány hatványt.

$n=1$: $x^{(1)}=x=[x]+\{x\}$.

$n=2$: $x^{(2)}=x\circ x=[x]^2+\big\{\{x\}+\{x\}\big\}=[x]^2+\{2\{x\}\}$.

$n=3$: $x^{(3)}=x^{(2)}\circ x=\big([x]^2+\{2\{x\}\}\big)\circ x=[x]^2\,[x]+\big\{\{2\{x\}\}+\{x\}\big\}=[x]^3+\{3\{x\}\}$.

Ahol felhasználtuk, hogy $\{\{u\}+v\}=\{u+v\}$. (**1 pont**)

A sejtés az, hogy $x^{(n)}=[x]^n+\{n\{x\}\}$, minden $n\in\mathbb{N}^*$ és $x\in\mathbb{R}$ esetén. Az $n=1,2,3$ esetek teljesülnek, így elég az indukciós lépést igazolnunk. Tegyük fel, hogy $x^{(k)}=[x]^k+\{k\{x\}\}$ igaz minden $x\in\mathbb{R}$ esetén, valamilyen $k\geq1$ természetes számra. Ekkor

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}\circ x=\big([x]^k+\{k\{x\}\}\big)\circ x=[x]^k\,[x]+\big\{\{k\{x\}\}+\{x\}\big\}.$$

A törtrész esetén felhasználva, hogy $\{\{u\}+v\}=\{u+v\}$, tovább írhatjuk, hogy

$$x^{(k+1)}=[x]^{k+1}+\{k\{x\}+\{x\}\}=[x]^{k+1}+\{(k+1)\{x\}\}.$$

Tehát teljesül $(k+1)$ esetén is. Így a matematikai indukció elve alapján $x^{(n)}=[x]^n+\{n\{x\}\}$ minden $n\in\mathbb{N}^*$ és $x\in\mathbb{R}$ esetén. (**1 pont**)

Tudjuk, hogy $e=1$, így az $x^{(2026)}=e$ egyenlet ekvivalens az

$$[x]^{2026}+\{2026\{x\}\}=1$$

egyenlettel. Ez pontosan akkor teljesül, ha $[x]^{2026}=1$ és $\{2026\{x\}\}=0$. Mivel 2026 egy páros szám így $[x]^{2026}=1$ azzal egyenértékű, hogy $[x]\in\{-1,1\}$; ez két lehetőség. (**1 pont**)

A törtrész pontosan akkor nulla, ha $2026\{x\}$ egy egész szám. Mivel $0\leq\{x\}<1$ így $0\leq2026\{x\}<2026$, vagyis $2026\{x\}\in\{0,1,\ldots,2025\}$. Tehát $\{2026\{x\}\}=0$ azzal egyenértékű, hogy

$$\{x\}\in\left\{0,\frac{1}{2026},\frac{2}{2026},\ldots,\frac{2025}{2026}\right\};$$

ez 2026 lehetőség.

Mivel egy szám egész részét és törtrészét egymástól függetlenül megválaszthatjuk, így az egyenletnek összesen $2\cdot2026=4052$ megoldása van. (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont). Igazold, hogy a $2^x = x^{32}$ egyenletnek pontosan három valós megoldása van! Lásd be azt is, hogy ezek közül pontosan egy racionális!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Ha $x > 0$, akkor az egyenlőséget logaritmálva kapjuk, hogy $x \cdot \ln 2 = 32 \cdot \ln x$, vagyis

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{32}.$$

Vizsgáljuk az

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln 2}{32}$$

függvény változását. **(1 pont)**
A függvény folytonos és deriválható az értelmezési tartományán.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

tehát $f'(x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = e$. **(2 pont)**
A deriváltfüggvény előjele pozitív a $(0, e)$ intervallumon, ott a függvény szigorúan növekvő, és az előjele negatív az (e, ∞) intervallumon, ott a függvény szigorúan csökkenő. **(1 pont)**
Az $f(1) < 0$, az $f(e) > 0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) < 0$, ezért az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van a $(0, e)$ intervallumban és pontosan egy másik valós gyöke van az (e, ∞) intervallumban. **(1 pont)**
Ha $x < 0$, akkor a $g(x) = 2^x$ szigorúan növekvő, folytonos és $g(0) = 1$, a $h(x) = x^{32}$ függvény pedig szigorúan csökkenő, folytonos és $h(0) = 0$, ezért az adott $2^x = x^{32}$ egyenletnek pontosan egy gyöke van a $(-\infty, 0)$ intervallumban. Tehát az adott egyenletnek pontosan 3 valós megoldása van. **(1 pont)**
Valódi tört megoldása az egyenletnek nem lehet, mert akkor 2^x irracionális lenne, és x^{32} pedig racionális lenne, így nem lehetnének egyenlőek. Az egyenletnek negatív egész megoldása sem lehet mivel ez esetben $2^x < 1$ és $x^{32} > 1$, így nem lehetnének egyenlőek. **(1 pont)**
Vizsgáljuk milyen pozitív egész lehet megoldása az egyenletnek. Az 1 nem lehet megoldás és a 2 sem. A $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{32}$ egyenleten a következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük:

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{8 \cdot \ln 2}{8 \cdot 32} \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2^8}{256} \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 256}{256}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Innen következik, hogy az (e, ∞) intervallumon létező egyértelmű megoldás a 256, és a fentiek alapján ez az egyetlen racionális megoldás, tehát a másik két megoldás irracionális. **(1 pont)**
■

4. feladat (10 pont). A $(G, \cdot)$ véges csoportnak A olyan részhalmaza, amely esetén $2|A| > |G|$, ahol $|H|$-val jelöljük a H halmaz elemeinek számát. Vezessük be az

$$r(g) = |\{(a, b) \in A \times A \mid a \cdot b = g\}|$$

jelölést, ahol $g \in G$ (tehát $r(g)$ azoknak az $(a, b) \in A \times A$ pároknak a száma, amelyekre $a \cdot b = g$).

a) Számítsd ki $\sum\limits_{g\in G} r(g)$ értékét!

b) Bizonyítsd be, hogy $r(g) \geq 2|A| - |G|$, minden $g \in G$ esetén!

c) Határozd meg azokat az A részhalmazokat, amelyekre $r(g) = 2|A| - |G|$, minden $g \in G$ esetén!

Lukács Andor, Kolozsvár

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az $S_g = \{(a, b) \in A \times A \mid ab = g\}$ halmazok páronként diszjunktak, és minden (a, b) párhoz pontosan egy $g \in G$ elem tartozik, ezért $\sum_{g \in G} r(g) = |A \times A| = |A|^2$. **(2 pont)**

b) Az $ab = g$ összefüggés pontosan akkor teljesül, ha $a = gb^{-1}$. A $gA^{-1} = \{gb^{-1} \mid b \in A\}$ halmaznak ugyanannyi eleme van, mint az A-nak, mivel a $b \mapsto gb^{-1}$ leképezés bijekció A-ról gA^{-1}-re. **(2 pont)** Ezért

$$r(g) = |gA^{-1} \cap A| = |A| + |gA^{-1}| - |A \cup gA^{-1}| = |A| + |A| - |A \cup gA^{-1}| \geq 2|A| - |G|. \quad \textbf{(2 pont)}$$

c) Ha minden g esetén $r(g) = 2|A| - |G|$, akkor az előző alpontok alapján következik, hogy

$$|A|^2 = \sum_{g \in G} r(g) = \sum_{g \in G} (2|A| - |G|) = |G|(2|A| - |G|),$$

ahonnan átrendezéssel az $(|A| - |G|)^2 = 0$, vagyis az $A = G$ egyenlőséghez jutunk. **(2 pont)** Fordítva, ha $A = G$, akkor $r(g) = |G| = 2|A| - |G|$ teljesül minden g esetén, tehát a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha $A = G$. **(1 pont)**

■

Alternatív megoldás az a) és b) alpontra. Legyen $|A| = k$; $|G| = n$, tehát $2k > n$. Vezessük be az A és G halmazok elemeinek a következő jelölését:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \quad \text{és} \quad G = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}.$$

a) Ha tekintjük az A halmaz művelettábláját, vagyis az

$\cdot$	a_1	a_2	$\cdots$	a_k
a_1	a_1a_1	a_1a_2	$\cdots$	a_1a_k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_2	a_2a_1	a_2a_2	$\cdots$	a_2a_k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_k	a_ka_1	a_ka_2	$\cdots$	a_ka_k

táblázatot, akkor tetszőleges $g \in G$ esetén $r(g)$ a táblázatban g előfordulásának száma, tehát a $\sum_{g \in G} r(g)$ tulajdonképpen a táblázatban előforduló számok száma, azaz

$$\sum_{g \in G} r(g) = k^2 = |A|^2. \quad \textbf{(2 pont)}$$

b) Tekintsük a G művelettábláját:

$\cdot$	a_1	a_2	$\cdots$	a_k	a_{k+1}	$\cdots$	a_n
a_1	a_1a_1	a_1a_2	$\cdots$	a_1a_k	a_1a_{k+1}	$\cdots$	a_1a_n
a_2	a_2a_1	a_2a_2	$\cdots$	a_2a_k	a_2a_{k+1}	$\cdots$	a_2a_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_k	a_ka_1	a_ka_2	$\cdots$	a_ka_k	a_ka_{k+1}	$\cdots$	a_ka_n
a_{k+1}	$a_{k+1}a_1$	$a_{k+1}a_2$	$\cdots$	$a_{k+1}a_k$	$a_{k+1}a_{k+1}$	$\cdots$	$a_{k+1}a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	a_na_1	a_na_2	$\cdots$	a_na_k	a_na_{k+1}	$\cdots$	a_na_n

Egy tetszőleges $g \in G$ elem minden sorban és minden oszlopban pontosan egyszer szerepel, mert G csoport. Így az első k sorban legfeljebb $n-k$ darab g szerepel a $k+1, \ldots, n$ oszlopokban.
(**2 pont**)
Ez viszont azt jelenti, hogy legalább $k-(n-k)$ darab g szerepel az első k oszlopban és első k sorban, vagyis az $A \times A$ -nak megfelelő részben a G művelettáblájában. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$r(g) \geq 2k - n. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

■

Alternatív megoldás a c) alpontra. A b) alpontban egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $|gA^{-1} \cup A| = |G|$, de $gA^{-1} \cup A \subseteq G$, vagyis ha

$$gA^{-1} \cup A = G, \quad \forall g \in G.$$

Legyen $g_1, g_2 \in G$ tetszőleges. Írhatjuk, hogy $g_1 \in g_2A^{-1} \cup A$. Ha $g_1 \notin A$, akkor a fenti összefüggésből következik, hogy létezik $a \in A$ úgy, hogy $g_1 = g_2a^{-1}$, vagyis $a = g_1^{-1}g_2 \in A$.
Összefoglalva az előbbi részleteket, következik, hogy minden $g_1, g_2 \in G$ esetén, ha $g_1 \notin A$, akkor $g_1^{-1}g_2 \in A$.
Ennek az észrevételnek a felhasználásával igazoljuk, hogy szükséges és elégséges az $A = G$ feltétel. Valóban, ha létezik $g \in G$ úgy, hogy $g \notin A$, akkor válasszuk a $g_1 = g$ és $g_2 = g^2$ elemeket. Ekkor $g_1^{-1}g_2 = g \in A$, ami ellentmondás. Ezzel igazoltuk, hogy szükséges az $A = G$ feltétel, ami viszont elégséges is, hiszen ha $A = G$, akkor $r(g) = |G| = 2|A| - |G|$ teljesül minden $g \in G$ esetén. (**3 pont**)
■

Hivatalból összesen: 4 pont.

További pontszám összesen: 36 pont.