MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA
HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE
VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
2026. február 23-27., Gyergyószentmiklós
SALAMON ERNŐ GIMNÁZIUM

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 24.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Számítsd ki az

$$\int \frac{\sin 2x}{a+\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$$

integrált, ahol a olyan valós szám, amelyre $|a|>1$.

2. feladat. Jelölje $[x]$ az x valós szám egészrészét, $\{x\}$ pedig a törtrészét. A valós számok halmazán a „$\circ$” műveletet az

$$x\circ y=[x]\cdot[y]+\big\{\{x\}+\{y\}\big\},\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

szabállyal értelmezzük. (A második tagban a külső kapcsos zárójel az összeg törtrészét jelöli).

a) Határozd meg a valós számok azon legbővebb $M\subset\mathbb{R}$ részhalmazát, amelyre teljesül, hogy $[x]\neq 0$ minden $x\in M$ esetén, és az $(M,\circ)$ pár Abel-csoportot alkot!

b) Legyen $x^{(n)}=\underbrace{x\circ x\circ\cdots\circ x}_{n}$, ahol $n\in\mathbb{N}^*$. Határozd meg, hány olyan $x\in M$ létezik, amelyre teljesül az $x^{(2026)}=e$ egyenlőség, ahol e a csoport semleges eleme!

3. feladat. Igazold, hogy a $2^x=x^{32}$ egyenletnek pontosan három valós megoldása van! Lásd be azt is, hogy ezek közül pontosan egy racionális!

4. feladat. A $(G,\cdot)$ véges csoportnak A olyan részhalmaza, amely esetén $2|A|>|G|$, ahol $|H|$-val jelöljük a H halmaz elemeinek számát. Vezessük be az

$$r(g)=|\{(a,b)\in A\times A\mid a\cdot b=g\}|$$

jelölést, ahol $g\in G$ (tehát $r(g)$ azoknak az $(a,b)\in A\times A$ pároknak a száma, amelyekre $a\cdot b=g$).

a) Számítsd ki $\sum\limits_{g\in G} r(g)$ értékét!

b) Bizonyítsd be, hogy $r(g)\geq 2|A|-|G|$, minden $g\in G$ esetén!

c) Határozd meg azokat az A részhalmazokat, amelyekre $r(g)=2|A|-|G|$, minden $g\in G$ esetén!

Megjegyzés: Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, hivatalból minden feladatra 1 pont jár.
Munkaidő: 3 óra.