VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
országos szakasz, 2026. február 25.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). Adottak $x, y \in \mathbb{R}^*$ úgy, hogy

$$|x| + \frac{25}{|x|} + 16|y| + \frac{1}{4|y|} \leq \left[2\sqrt{7}+1\right] + 8,$$

ahol $[a]$ az a szám egész részét jelöli. Mutasd ki, hogy

$$\sqrt{\frac{|x|}{|y|} + 22\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 27}$$

természetes szám!

Mastan Eliza, Nagybánya
Fodor Erika, Beszterce

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Az $|x|$ és $\dfrac{25}{|x|}$ számokra felírva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget

$$|x| + \frac{25}{|x|} \geq 2\sqrt{|x| \cdot \frac{25}{|x|}} = 10. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan a $16|y|$ és $\dfrac{1}{4|y|}$ számok esetén

$$16|y| + \frac{1}{4|y|} \geq 2\sqrt{16|y| \cdot \frac{1}{4|y|}} = 4. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel

$$\left[2\sqrt{7}+1\right] + 8 = \left[\sqrt{28}\right] + 1 + 8 = 5 + 9 = 14, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

az eredeti egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$|x| + \frac{25}{|x|} + 16|y| + \frac{1}{4|y|} \leq 14. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ugyanakkor láttuk, hogy

$$|x| + \frac{25}{|x|} + 16|y| + \frac{1}{4|y|} \geq 10 + 4 = 14, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ezért

$$|x| + \frac{25}{|x|} + 16|y| + \frac{1}{4|y|} = 14,$$

és az egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$|x| = \frac{25}{|x|} \quad \text{és} \quad 16|y| = \frac{1}{4|y|},$$

vagyis $|x| = 5$ és $|y| = \frac{1}{8}$. **(2 pont)**
Tehát

$$\sqrt{\frac{|x|}{|y|} + 22\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 27} = \sqrt{40 + 22(25 + 64) + 27} = \sqrt{40 + 1958 + 27} = \sqrt{2025} = 45.$$

Tehát a kifejezés természetes szám, értéke 45. **(2 pont)**
■

Második megoldás.

$$[2\sqrt{7} + 1] + 8 = [\sqrt{28}] + 1 + 8 = 5 + 9 = 14. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Bevezetjük a következő jelöléseket

$$|x| = a^2, \qquad |y| = b^2.$$

Így az egyenlőtlenség átírható, mint

$$\begin{aligned} &\iff a^2 + \frac{25}{a^2} + 16b^2 + \frac{1}{4b^2} - 14 \leq 0 \\ &\iff a^2 - 10 + \frac{25}{a^2} + 16b^2 - 4 + \frac{1}{4b^2} \leq 0 \\ &\iff \left(a - \frac{5}{a}\right)^2 + \left(4b - \frac{1}{2b}\right)^2 \leq 0. \end{aligned} \quad \textbf{(3 pont)}$$

Innen következik, hogy

$$\begin{cases} a - \dfrac{5}{a} = 0 \\ 4b - \dfrac{1}{2b} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 5 \\ b^2 = \dfrac{1}{8}. \end{cases} \quad \textbf{(2 pont)}$$

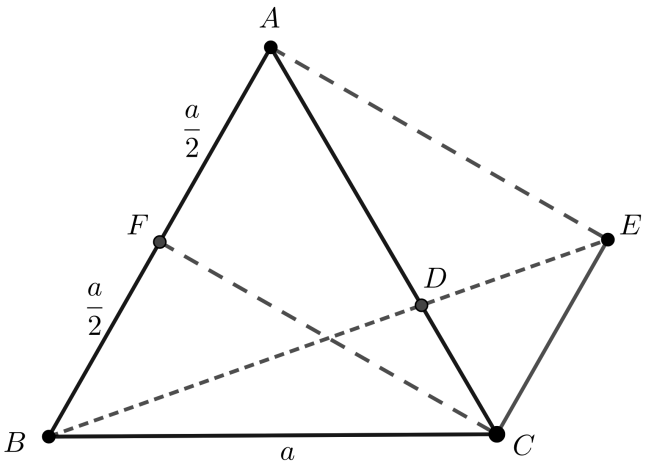
Tehát $|x| = 5$ és $|y| = \frac{1}{8}$. **(1 pont)**
Elvégezve a számítást kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{|x|}{|y|} + 22\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 27} = \sqrt{5 \cdot 8 + 22(25 + 64) + 27} = \sqrt{2025} = 45 \in \mathbb{N}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

■

2. feladat (10 pont). Az ABC egyenlő oldalú háromszögben legyen D az AC szakasz belső pontja, amelyre $AD = k \cdot DC$. A BD egyenesen az E pontot úgy vesszük fel, hogy $BE = (k+1) \cdot DE$ és D a BE szakasz belső pontja. Határozzuk meg a k értékét úgy, hogy AE merőleges legyen az AB egyenesre! *Olosz Ferenc, Szatmárnémeti*

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Az ABC egyenlő oldalú háromszögben legyen $AB = BC = CA = a$. Mivel $BE = (k+1) \cdot DE$, ezért

$$\frac{BE}{DE} = k + 1.$$

Mivel D a BE szakasz belső pontja, ezért

$$\frac{BD}{DE} = \frac{BE - DE}{DE} = \frac{(k+1) - 1}{1} = k. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Az $AD = k \cdot DC$ egyenlőségből adódik, hogy $\dfrac{AD}{DC} = k$, tehát

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DE}.$$

A Thalész fordított tételéből következik, hogy $AB \parallel CE$. **(2 pont)**
A hasonlóság alaptétele alapján a DAB háromszög hasonló a DCE háromszöggel, így

$$\frac{AB}{CE} = \frac{AD}{DC} = k,$$

tehát

$$CE = \frac{AB}{k} = \frac{a}{k}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Legyen F a C pontból az AB oldalra húzott magasság talppontja. Tudjuk, hogy az egyenlő oldalú háromszög magassága egyben oldalfelező is, ezért

$$AF = FB = \frac{a}{2}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $FC \perp AB$ és az $AE \perp AB$, ezért $AE \parallel FC$. Másrészt $AB \parallel CE$, következik, hogy az $AFCE$ négyszög téglalap, így

$$AF = CE.$$

Tehát

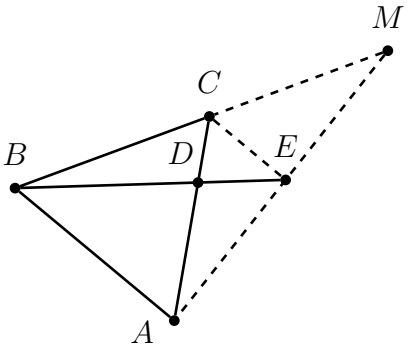
$$\frac{a}{2} = \frac{a}{k},$$

ahonnan $k = 2$. **(1 pont)**

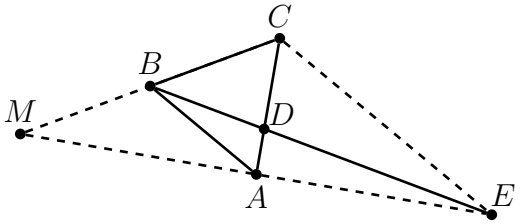
A $k = 2$ esetben $CE = \frac{a}{2} = AF$ és $CE = AF$, ezért $AECF$ paralelogramma, amelyben $\widehat{CFA} = 90°$, így $AE \perp AB$. **(1 pont)**

■

Megjegyzés. Az előző megoldást onnan folyatjuk, hogy $AB \parallel CE$ és $k \cdot CE = AB$.
Ha $k = 1$, akkor az $ABCE$ négyszög egy paralelogramma, ekkor $\widehat{BAE} = 180° - \widehat{ABC} = 120°$.
Feltételezhetjük, hogy $k \neq 1$, ekkor vehetjük az M pontot, ami az AE és BC egyenesek metszete.
Ha $k < 1$, akkor $B \in (MC)$ és $A \in (ME)$, valamint $\widehat{BCE} = 120°$ (belső váltószög $\widehat{ABC}$-gel). Ekkor az MCE háromszög tompaszögű C-ben, így hegyesszögű az E pontban. Mivel $\widehat{BAE}$ és $\widehat{AEC}$ belső váltószögek, így $\widehat{BAE}$ tompaszög.



$k > 1$ esete



$k < 1$ esete

Ha $k > 1$, akkor $C \in (BM)$ és $E \in (AM)$. Belátjuk, hogy BAM háromszög derékszögű A-ban pontosan akkor, ha C felezőpontja a BM szakasznak. Ha C felezőpont, akkor $AC = BC = CM$, vagyis C az ABM köré írt kör középpontja és BM átmérő, tehát $\widehat{BAE} = 90°$. Fordítva, a BAM háromszögben a szögek rendre $60°, 90°, 30°$, és $AC = BC$. Továbbá $AC = CM$, mert az $\widehat{CAM} = \widehat{CMA} = 30°$.
Az MCE és MBA háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{MC}{MB} = \frac{CE}{AB} = \frac{1}{k}.$$

Tehát C felezőpontja a BM szakasznak pontosan akkor, ha $k = 2$. **(5 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Oldd meg a $(2xy-10)^2 = 4x^2+y^2$. egyenletet az egész számok halmazán!

Mastan Eliza, Nagybánya
Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az egyenlet egyenértékű azzal, hogy

$$4x^2y^2 - 40xy + 100 = 4x^2 + y^2.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $4xy$-t, rendre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 4x^2y^2 - 36xy + 100 &= (2x+y)^2, \\ (2xy-9)^2 + 19 &= (2x+y)^2, \\ (2xy-9)^2 - (2x+y)^2 &= -19. \end{aligned}$$ **(2 pont)**

Legyen $a = 2xy - 9$ és $b = 2x + y$. Ekkor

$$(a-b)(a+b) = -19.$$

Mivel 19 prímszám, lehetséges felbontások:

$$(a-b,\, a+b) \in \{(-1,19),\, (1,-19),\, (-19,1),\, (19,-1)\}.$$

Innen következik, hogy

$$(a,b) \in \{(9,10), (-9,-10), (-9,10), (9,-10)\}.$$ **(2 pont)**

Tehát az alábbi rendszereket kapjuk:

$$\begin{cases} 2xy-9=9 \\ 2x+y=10 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} 2xy-9=-9 \\ 2x+y=-10 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} 2xy-9=-9 \\ 2x+y=10 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} 2xy-9=9 \\ 2x+y=-10. \end{cases}$$

1. eset: Az $xy = 9$ és $2x + y = 10$ egyenletekből a $2x^2 - 10x + 9 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek diszkriminánsa $\Delta = 100 - 72 = 28$ nem négyzetszám, tehát nincs egész megoldás. **(1 pont)**

2. eset: Az $xy = 0$ és $2x + y = -10$ egyenletekből

$$(x,y) \in \{(0,-10), (-5,0)\}.$$ **(1 pont)**

3. eset: Az $xy = 0$ és $2x + y = 10$ egyenletekből

$$(x,y) \in \{(0,10), (5,0)\}.$$ **(1 pont)**

4. eset: Az $xy = 9$ és $2x+y = -10$ egyenletekből a $2x^2+10x+9 = 0$ egyenlethez jutunk, amelynek nincs egész megoldása, mert $\Delta = 28$. **(1 pont)**

Az egyenlet megoldásai

$$(x, y) \in \{(0, -10),\ (0, 10),\ (-5, 0),\ (5, 0)\}.$$ **(1 pont)**

■

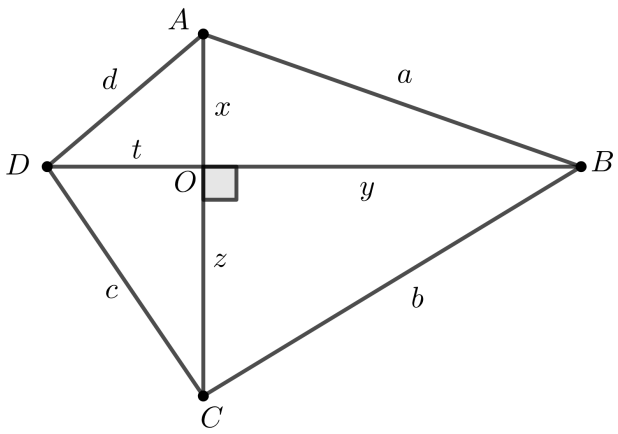
4. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy egy konvex négyszög akkor és csakis akkor ortodiagonális (átlói merőlegesek egymásra), ha szemben fekvő oldalainak négyzetösszege megegyezik!

b) Igazold, hogy ha egy kör köré írható négyszög ortodiagonális, akkor deltoid (az egyik átlója a szimmetriatengelye)!

Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) $\boxed{\Rightarrow}$ Legyen az $ABCD$ konvex négyszög oldalainak hossza $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ és $AD = d$. Legyen O az átlók metszéspontja és jelöljük az alábbi szakaszokat: $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ és $OD = t$.

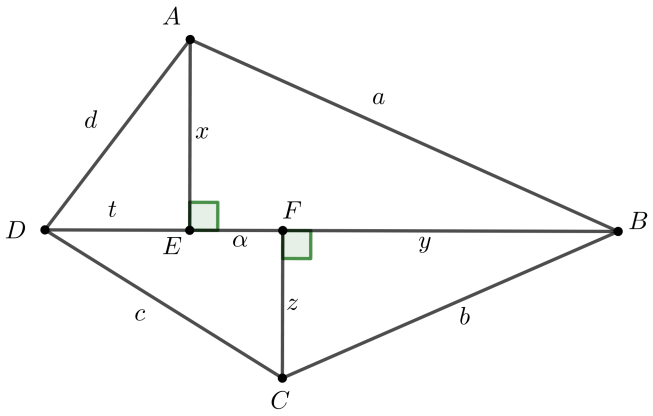


Pitagorasz tételét alkalmazva az AOB, BOC, COD és AOD derékszögű háromszögekben felírhatjuk az alábbi összefüggéseket:

$$a^2 = x^2 + y^2, \quad b^2 = y^2 + z^2, \quad c^2 = z^2 + t^2 \quad \text{és} \quad d^2 = x^2 + t^2$$

Innen beláthatjuk, hogy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. **(2 pont)**

$\boxed{\Leftarrow}$ A *reductio ad absurdum* módszerét alkalmazva feltételezzük, hogy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, de AC és BD nem merőlegesek egymásra.



A mellékelt ábrán látható módon megszerkesztjük az $AE \perp DB$ és $CF \perp BD$ szakaszokat. Jelöljük $AE = x$, $FB = y$, $FC = z$ és $DE = t$, valamint $EF = \alpha$. Pitagorasz tételét alkalmazva az AEB, BFC, CFD és DEA háromszögekben:

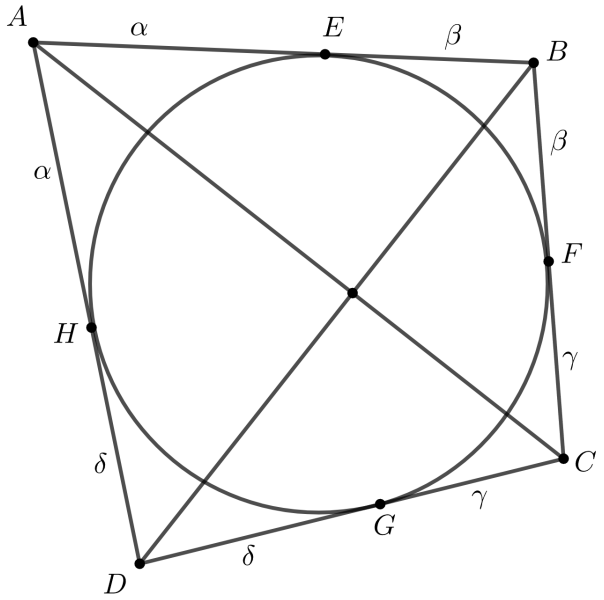
$$a^2 = x^2 + (\alpha + y)^2; \quad b^2 = z^2 + y^2; \quad c^2 = (t + \alpha)^2 + z^2; \quad d^2 = x^2 + t^2$$

Mivel $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, ezért felírhatjuk, hogy

$$x^2 + \alpha^2 + y^2 + 2\alpha y + t^2 + 2\alpha t + \alpha^2 + z^2 = z^2 + x^2 + y^2 + t^2,$$

ahonnan $\alpha(2\alpha + 2y + 2t) = 0$, tehát $\alpha = 0$, vagyis az E és F pontok egybeesnek, ezért $AC \perp BD$. **(2 pont)**

b) A négyszög AB, BC, CD és DA oldalai a kört rendre az E, F, G és H pontban érintik.



Jelöljük $AE = AH = \alpha$, $EB = BF = \beta$, $FC = CG = \gamma$ és $GD = DH = \delta$. Ha az $ABCD$ négyszög ortodiagonális, akkor az a) alpont alapján szemben fekvő oldalainak négyzetösszege egyenlő, tehát

$$(\alpha + \beta)^2 + (\gamma + \delta)^2 = (\alpha + \delta)^2 + (\beta + \gamma)^2, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ahonnan $\alpha\beta + \gamma\delta = \alpha\delta + \beta\gamma$, ezt pedig átrendezve kapjuk, hogy

$$\alpha(\beta - \delta) - \gamma(\beta - \delta) = 0 \implies (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) = 0, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

tehát $\alpha = \gamma$ vagy $\beta = \delta$. **(1 pont)**
Ha $\alpha = \gamma$, akkor az ABC és ADC háromszögek egyenlő szárúak, tehát BD szimmetriatengelye az $ABCD$ négyszögnek, tehát $ABCD$ deltoid. Hasonlóan ha $\beta = \delta$, akkor AC szimmetriatengelye az $ABCD$ négyszögnek, tehát $ABCD$ deltoid. **(2 pont)**

■

5. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy az $A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2\}$ halmaznak van két olyan négyelemű diszjunkt részhalmaza, amelyek elemeinek összege egyenlő!

b) Igazold, hogy a $B = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2024^2\}$ halmaznak van két olyan B_1 és B_2 diszjunkt részhalmaza, amelyekre $B_1 \cup B_2 = B$ és B_1 elemeinek összege egyenlő a B_2 elemeinek összegével!

Kocsis Attila, Déva
Németi Mónika, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az A halmaz elemeinek összege

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204,$$

tehát a két részhalmazban levő számok összege 102, páros szám. Ezért vagy négy ugyanolyan paritású szám kell legyen egy részhalmazban (ez nem elégíti ki a feltételt), vagy két páros és két páratlan szám kell legyen egy részhalmazban. Mivel $1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$, ezért a két halmaz $\{1^2, 4^2, 6^2, 7^2\}$ és $\{2^2, 3^2, 5^2, 8^2\}$. **(3 pont)**

b) Felhasználjuk az a) alpontban kapott eredményt, így

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $4 \cdot (8k)^2 + 36 \cdot (8k)$-t, azt kapjuk, hogy

$$(8k+1)^2 + (8k+4)^2 + (8k+6)^2 + (8k+7)^2 = (8k+2)^2 + (8k+3)^2 + (8k+5)^2 + (8k+8)^2. \quad \textbf{(3 pont)}$$

Mivel 2024 osztható 8-cal, ezért az első 2024 nemnulla négyzetszámot 8-as csoportokba osztjuk, majd a nyolcas csoportokból az előbbi azonosságban a bal oldalon megjelenő 4 számot a B_1-be, a jobb oldalon megjelenő 4 számot a B_2-be soroljuk:

$$B_1 = \{(8k+1)^2, (8k+4)^2, (8k+6)^2, (8k+7)^2 \mid k = \overline{0, 252}\},$$
$$B_2 = \{(8k+2)^2, (8k+3)^2, (8k+5)^2, (8k+8)^2 \mid k = \overline{0, 252}\}. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

■

6. feladat (10 pont). Egy négyzetrácsos lapra rajzolt tetszőleges rácstéglalap felbontása alatt azt értjük, hogy olyan négyzetekre bontjuk, melyek csúcsai rácspontok, oldalaik pedig párhuzamosak a téglalap oldalaival, és amelyek belsejei diszjunktak. A téglalap minden ilyen lehetséges felbontása mellé odaírjuk a felbontásban szereplő legkisebb négyzet oldalhosszát.
Rajzolhat-e Norbi olyan $m \times n$-es téglalapot, amely esetén a leírt számok közül a legnagyobb szám a 2025, illetve az m és n számok legnagyobb közös osztója:
a) 2026, b) 2025, c) 1.

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Nem rajzolhat. Feltételezzük, hogy az m és n számok legnagyobb közös osztója 2026. Mivel $2026 \mid m$ és $2026 \mid n$, ezért létezik ilyen felbontás. Ebben a legkisebb oldalhosszúság, amit használunk az 2026, így ennek is szerepelnie kell a lapon, tehát nem lehet 2025 a Norbi által leírt legnagyobb szám. **(2 pont)**

b) Igen. Például legyen $m = 2025$, $n = 4050$. Két darab 2025×2025-ös négyzetre felbontható a téglalap, ebben az esetben 2025 a legkisebb oldalhosszúság, amelyet felhasználunk, tehát 2025 valóban szerepel a lapon. Ennél nagyobb négyzetet azonban nem használhatunk, hiszen $m = 2025$, így az kilógna a téglalapon kívülre. Tehát ekkor valóban 2025 a lapon szereplő legnagyobb szám és $\text{lnko}(2025, 4050) = 2025$. **(2 pont)**

c) Igen, rajzolhat. Például legyen $k = 2025$, $m = k + (k+1) = 2k + 1$ és $n = k(k+1)$. Az eredeti $m \times n$-es téglalapot felbontjuk két téglalapra: egy fenti $k \times k(k+1)$-es téglalapra és egy lenti $(k+1) \times k(k+1)$-es téglalapra. Tekintsük azt a felbontást, ahol a fenti $k \times k(k+1)$-es téglalaphoz kizárólag $k \times k$ méretű négyzeteket használunk (van ilyen, hiszen $k \mid k$ és $k \mid k(k+1)$). Analóg módon pedig az alsó $(k+1) \times k(k+1)$-es téglalaphoz csak $(k+1) \times (k+1)$-est használunk. Ekkor a legkisebb oldalhosszúság, amit használunk, az k, tehát ez valóban szerepel a lapon. **(2 pont)**
Lássuk be a reductio ad absurdum módszerével, hogy

$$\text{lnko}(2k+1\,,\, k(k+1)) = 1.$$

Legyen p egy olyan prím, melyre $p \mid 2k+1$ és $p \mid k(k+1)$, ezért $p \mid [2k(k+1) - k(2k+1)]$, ahonnan $p \mid k$, így $p \mid 2k$, de $p \mid 2k+1$, ellentmondás, tehát

$$\text{lnko}(2k+1\,,\, k(k+1)) = 1. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Ha lenne k-nál nagyobb szám a lapon, akkor lenne olyan felbontás, ahol minden négyzet oldalhosszúsága legalább $k+1$. Ugyanakkor a nagy téglalapnak összesen $2k+1$ sora van, így ez csak úgy lehetséges, ha csak $(2k+1) \times (2k+1)$-es négyzeteket használunk, ezért

$$2k+1 \mid k(k+1),$$

de az előbb beláttuk, hogy

$$\text{lnko}(2k+1\,,\, k(k+1)) = 1,$$

ez ellentmondás. Tehát valóban k a legnagyobb szám a lapon ez esetben, és $\text{lnko}(m, n) = 1$, ha pedig $k = 2025$-t helyettesítünk, adódik a feladat állítása. **(1 pont)**

Megjegyzés. A c) alpontban a versenyző meg kell adjon egy $m \times n$-es téglalapot, amelyről ellenőriznie kell, hogy

1. $\text{lnko}(m, n) = 1$, (**1 pont**)

2. van olyan felbontása, amelyben a legkisebb négyzet oldalhossza 2025, (**2 pont**)

3. bármely felbontása esetén a leírt számok közül a legnagyobb 2025. (**2 pont**)

■

Hivatalból összesen: 6 pont.

További pontszám összesen: 54 pont.